

Stabile Algorithmen für die Magnetotomographie an Brennstoffzellen

Martin Wannert

Forschungszentrum Jülich GmbH
Institut für Energieforschung (IEF)
Brennstoffzellen (IEF-3)

Stabile Algorithmen für die Magneto- tomographie an Brennstoffzellen

Martin Wannert

Schriften des Forschungszentrums Jülich
Reihe Energie & Umwelt / Energy & Environment

Band / Volume 64

ISSN 1866-1793

ISBN 978-3-89336-623-1

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek.
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte Bibliografische Daten
sind im Internet über <<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

Herausgeber und Vertrieb: Forschungszentrum Jülich GmbH
Zentralbibliothek, Verlag
D-52425 Jülich
Telefon (02461) 61-5368 · Telefax (02461) 61-6103
e-mail: zb-publikation@fz-juelich.de
Internet: <http://www.fz-juelich.de/zb>

Umschlaggestaltung: Grafische Medien, Forschungszentrum Jülich GmbH

Druck: Grafische Medien, Forschungszentrum Jülich GmbH

Copyright: Forschungszentrum Jülich 2010

Schriften des Forschungszentrums Jülich
Reihe Energie & Umwelt / Energy & Environment Band / Volume 64

D 7 (Diss., Göttingen, Univ., 2010)

ISSN 1866-1793
ISBN 978-3-89336-623-1

Vollständig frei verfügbar im Internet auf dem Jülicher Open Access Server (JUWEL)
unter <http://www.fz-juelich.de/zb/juwel>

Alle Rechte vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (Druck, Fotokopie oder in einem anderen Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung des Verlages reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	ix
Tabellenverzeichnis	xi
Algorithmenverzeichnis	xiii
1 Einleitung	1
2 Grundlagen	11
2.1 Sobolev-Räume	11
2.2 Potentialtheorie	18
2.3 Funktionalanalysis und schlecht gestellte Probleme	23
2.4 Integraloperatoren	28
2.5 Vektoranalysis	31
2.6 Die Maxwell-Gleichungen	32
2.7 Das Biot-Savart-Gesetz	37
2.8 Messapparatur und Messverfahren	41
3 Klassische Algorithmen zur Magnetotomographie	45
3.1 Stetige und diskrete Realisierung des Biot-Savart-Operators	47
3.2 Tikhonov-Regularisierung mit finiter Integration	52
3.3 Divergenzfreie Tikhonov-Regularisierung	53
3.4 Projektionsmethode mit spezieller Basis	55
4 Der Einfluss von a-priori-Wissen	59
4.1 Algorithmische Stabilitätsanalyse	60
4.2 Evaluation von Stabilitätskonstanten für ein realistisches Setup	64

5	Nullraumäquivalenz für Ein- und Mehrschicht-Systeme	71
5.1	Ein- und Mehrschicht-Systeme	73
5.2	Source-Splitting für Magnetfelder	75
5.3	Eindeutigkeit für Stromrekonstruktionen in Oberflächen . . .	80
5.4	Nullraumäquivalenz	81
5.5	Beispiel eines Nullraumelements für das Einschicht-System .	89
6	Peeling-Algorithmus	93
6.1	Splitting des Magnetfelds	93
6.2	Der Peeling-Algorithmus	103
7	Rekonstruktionen mit einem Widerstandsnetzwerk	107
8	Zusammenfassung und Ausblick	111
	Literaturverzeichnis	115

Abbildungsverzeichnis

1.1	Aufbau und Reaktionsschema einer PEFC	2
1.2	Komponenten einer MEA und Aufbau eines DMFC-Stacks . .	4
2.1	Einteilung der Materie in Gruppen mit charakteristischen Magnetisierungseigenschaften	35
2.2	Magnetotomograph und Detailansicht der Sensoren	41
2.3	Exemplarischer Verlauf der x_3 -Komponente des Erdmagnetfelds über 24 Stunden	44
3.1	Anordnung von Ω und Messpunkten auf ∂G	46
3.2	Software-Realisierung des Drahtgittermodells und physikalische Entsprechung in Form eines Widerstandsnetzwerks . . .	48
3.3	Knoten- und Kantenummerierung	49
3.4	Beispielhafte Darstellung der Kirchhoff'schen Knoten- und Maschenregel	50
4.1	Zellkomponenten und ihre Abmessungen	65
4.2	Vergleich der Singulärwerte von $\mathbf{W}^{(A)}$, $\mathbf{W}^{(B)}$ und $\mathbf{W}^{(C)}$, Abstand der Messoberfläche: 60 mm	66
4.3	Vergleich des Reziproken der Singulärwerte von $\mathbf{W}^{(A)}$, $\mathbf{W}^{(B)}$ und $\mathbf{W}^{(C)}$ mit dem Reziproken der Singulärwerte des entsprechenden Tikhonov-Operators, Abstand der Messoberfläche: 60 mm	67
4.4	Vergleich des Reziproken der Singulärwerte von $\mathbf{W}^{(A)}$, $\mathbf{W}^{(B)}$ und $\mathbf{W}^{(C)}$ mit dem Reziproken der Singulärwerte des entsprechenden Tikhonov-Operators, Abstand der Messoberfläche: 30 mm	68

4.5	Vergleich der mit Methode (A), (B) und (C) rekonstruierten Stromverteilungen	69
5.1	Aufbau eines Ein- und eines Mehrschicht-Systems mit drei Schichten	71
5.2	Strömungsverteiler mit Füßchenstruktur in Auf- und Detailansicht	72
5.3	Potential $\psi^{(1)}$ aus (5.17)	89
5.4	Aus dem Potential (5.17) resultierende Stromverteilung (5.18) als Vektorplot auf Γ_1	90
5.5	Magnetfeld mit verschwindender dritter Komponente, das von der Stromverteilung $j^{(1)}$ in Γ_1 erzeugt wird	91
5.6	Stromverteilung $j_3^{(\Lambda)}$ in Λ	92
5.7	Konvergenz des Magnetfelds in der $\ \cdot\ _2$ -Norm bei einer Diskretisierung mit n^2 Punkten auf Γ_1 beziehungsweise Γ_2	92
6.1	Ω und die beiden Potentialoberflächen ∂D_1 und ∂D_2 um die Endplatten zur Realisierung des Splittings von H_3	98
6.2	Ω , die diskreten Messpunkte auf ∂G und die Fläche, auf der das Magnetfeld in Abbildung 6.3 ausgewertet wird (blau)	99
6.3	Gesplittete H_3 -Komponente für beide Oberflächen ∂D_1 und ∂D_2 , ausgewertet auf einer Fläche parallel zu den Endplatten	100
6.4	Relativer Splittingfehler für die Potentiale über ∂D_1 und ∂D_2 in Abhängigkeit der Anzahl der Diskretisierungspunkte n	101
6.5	Potentialoberflächen und Auswertungsoberfläche zur Analyse der Fehleranteile und des Gesamtfehlers	102
6.6	Fehleranteile der beiden Potentiale und Gesamtfehler für ein Setting wie in Abbildung 6.5	103
6.7	Gitter zur Stromrekonstruktion, für die Rekonstruktion in Γ_1 nach (6.4) wird nur der rot markierte Teil verwendet	104
6.8	Wahre und mit dem Peeling-Algorithmus rekonstruierte Stromverteilung in Λ	105
6.9	Vergleich einer Rekonstruktion mit Peeling-Algorithmus und divergenzfreier Tikhonov-Regularisierung bei optimal gewähltem Regularisierungsparameter	105
7.1	Schiebevorrichtung zum Stromlosschalten eines Widerstands	108
7.2	Verteilung der Messpunkte auf fünf Flächen um das Widerstandsnetzwerk	108

7.3	Stromrekonstruktionen in einem Widerstandsnetzwerk mit einer Fehlstelle (rot markiert), Schnittbilder der einzelnen Ebenen des Widerstandsnetzwerks aus Abbildung 3.2	109
7.4	Stromrekonstruktionen in einem Widerstandsnetzwerk mit einer Fehlstelle (rot markiert), Schnittbilder der einzelnen Ebenen des Widerstandsnetzwerks aus Abbildung 3.2	110

Tabellenverzeichnis

2.1	Spezifikationen des Tomographen	43
4.1	Durchschnittliche Rekonstruktionsfehler für verschiedene Abstände der Messoberfläche bei konstantem relativen Fehler in der rechten Seite von 5 %.	66
6.1	Relativer Splittingfehler für die Potentiale über ∂D_1 und ∂D_2 in Abhängigkeit der Anzahl der Diskretisierungspunkte n . .	101

Algorithmenverzeichnis

A.	Gewöhnliche Tikhonov-Regularisierung	53
B.	Divergenzfreie Tikhonov-Regularisierung	55
C.	Projektionsmethode mit spezieller Basis	57
D.	Peeling-Algorithmus	106

1

Einleitung

Brennstoffzellen sind Energiewandler, die chemische Energie direkt in elektrische und thermische Energie umwandeln. Die Umwandlung erfolgt elektrochemisch. In einer Brennstoffzelle befinden sich daher keine bewegten primären Teile, die unmittelbar an der Energieumwandlung beteiligt sind. Eine Brennstoffzelle besteht aus zwei Elektroden, die durch einen Elektrolyten voneinander getrennt sind. Die unterschiedlichen Brennstoffzellentypen werden nach Betriebstemperatur, zugeführtem Brennstoff und verwendetem Elektrolyten unterschieden. Abbildung 1.1 zeigt das grundsätzliche Reaktionsschema einer wasserstoffbetriebenen *Polymerelektrolyt-Brennstoffzelle* (PEFC¹), bei der der Elektrolyt eine gasdichte und protonen-, aber nicht elektronenleitende Ionomermembran ist. Die PEFC wird bei Temperaturen um 80 °C betrieben und ist eine Niedertemperatur-Brennstoffzelle. Die Elektroden bestehen hier zum Beispiel aus mit platinhaltigem Katalysator beschichtetem Kohlenstoffgewebe und bilden mit dem Elektrolyten die *Membran-Elektroden-Einheit* (MEA²).

Der Brennstoff (in diesem Fall Wasserstoff) wird an der Anode zugeführt. Dort werden die H_2 -Moleküle katalytisch unter Abgabe von zwei Elektronen zu zwei Protonen oxidiert, die aufgrund des Konzentrationsgradienten durch die Membran diffundieren. Die Elektronen werden außerhalb der Brennstoffzelle durch einen externen Verbraucher zur Kathode geführt. Dort wird üblicherweise Umgebungsluft zugeführt und der darin enthaltene Sauerstoff reagiert nach Aufnahme der Elektronen ebenfalls katalytisch mit den durch die Membran diffundierten Protonen zu Wasser.

¹PEFC: Polymer Electrolyte Fuel Cell

²MEA: Membrane Electrode Assembly

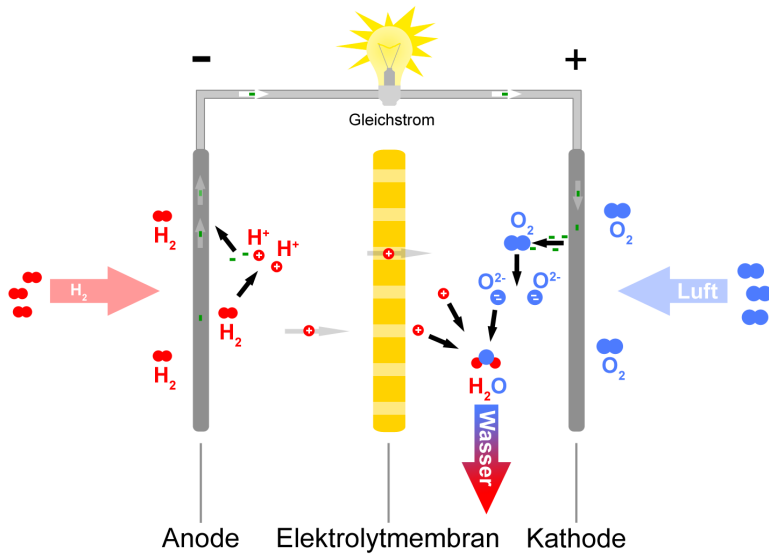
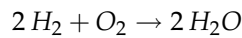
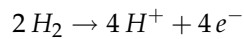


Abbildung 1.1: Aufbau und Reaktionsschema einer PEFC

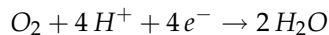
Die Gesamtreaktion



wird dabei in zwei Teilreaktionen



und



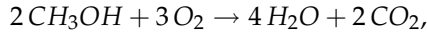
auf Anode und Kathode aufgeteilt.

Ähnlich zu einer mit Wasserstoff betriebenen PEFC ist die *Direkt-Methanol-Brennstoffzelle* (DMFC³) aufgebaut. Allerdings wird hier als Brennstoff flüssiges Methanol⁴ direkt zugeführt, ohne dass es vorher mittels Reformierung in ein

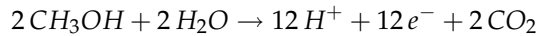
³DMFC: Direct Methanol Fuel Cell

⁴Gruppenformel: CH_3OH

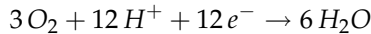
wasserstoffreiches Gas umgewandelt wurde. Die Reaktionsgleichung lautet dann



wobei auf Anode und Kathode die Teilreaktionen



beziehungsweise



ablaufen. Der Vorteil der DMFC liegt im vereinfachten Systemaufbau und dem einfacheren Umgang mit dem Brennstoff. Das bei Raumtemperatur flüssige Methanol kann unproblematisch in herkömmlichen Tanks gelagert werden. Wasserstoff muss dagegen unter Druck oder bei tiefen Temperaturen verflüssigt gespeichert werden, was einen zusätzlichen Energieaufwand bedeutet. Eine DMFC hat allerdings eine geringere Leistungsabgabe als eine mit Wasserstoff betriebene PEFC vergleichbarer Größe.

Ein wesentlicher Unterschied von Brennstoffzellen zu Batterien ist der, dass der Brennstoff kontinuierlich zugeführt wird und diese sich daher eher für den langfristigen Betrieb eignen. Eine Brennstoffzelle liefert eine Spannung von ungefähr 0,5 bis 1 V. Um höhere Spannungen zu erzielen, werden mehrere Zellen zu einem Brennstoffzellen-Stack in Reihe geschaltet. Sie werden dabei durch sogenannte Bipolarplatten voneinander getrennt, die die Aufgabe haben, die elektrische Verbindung zwischen zwei benachbarten Zellen herzustellen und gleichzeitig ihre Reaktionsräume zu trennen.

Abbildung 1.2 zeigt den Aufbau der MEA einer DMFC und die Stackkomponenten. Auf beiden Seiten der Membran befinden sich mit Katalysator beschichtete Diffusionsschichten, die den Transport der Edukte zum Katalysator und den Abtransport der Produkte sicherstellen. Der Verstärkungsrahmen stabilisiert diesen Verbund.

In einem DMFC-Stack hat der anodische beziehungsweise kathodische Strömungsverteiler die Aufgabe, die Reaktanden Methanol beziehungsweise Luft gleichmäßig über der Zellfläche zu verteilen. Zwischen den beiden Strömungsverteilern wird die MEA positioniert und den Abschluss bildet die oben beschriebene Bipolarplatte. Dieser Aufbau wird dann entsprechend der gewünschten Anzahl der Zellen wiederholt.

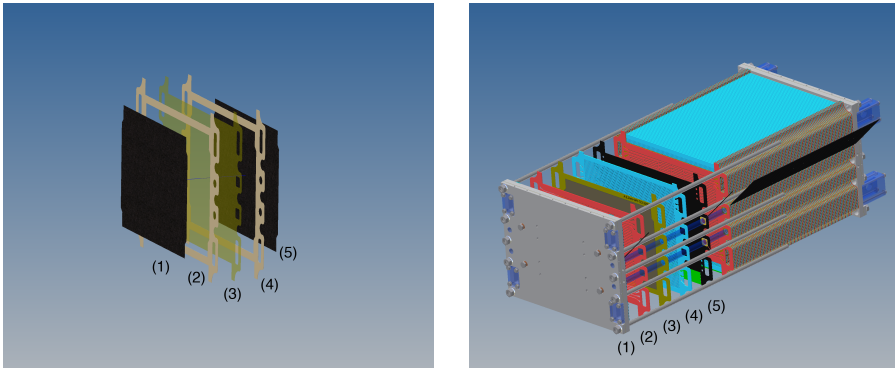


Abbildung 1.2: Komponenten einer MEA (links): Diffusionsschicht mit Katalysatorschicht (1) und (5), Verstärkungsrahmen (2) und (4), Membran (3)
 Aufbau eines DMFC-Stacks (rechts): Endplatte (1), anodischer Strömungsverteiler (2), MEA (3), kathodischer Strömungsverteiler (4), Bipolarplatte (5)

Für einen Überblick über verschiedene Brennstoffzellentypen, verwendete Materialien und Katalysatoren und die Brennstoffherzeugung verweisen wir auf den Übersichtsartikel [CFS00].

Um einen optimalen Zell- und Stackbetrieb zu gewährleisten, ist es notwendig, eine möglichst homogene Stromverteilung sowohl in einer Zelle als auch über den ganzen Stack sicher zu stellen. Die Ursachen einer inhomogenen Stromverteilung sind vielschichtig. Zum Beispiel kann eine ungleichmäßige Reaktandenverteilung über der Zellfläche die Inhomogenitäten hervorrufen. Andere Gründe können eine ungleichmäßige Temperaturverteilung, die unterschiedliche Reaktionsgeschwindigkeiten zur Folge hat, oder inhomogene Übergangswiderstände in der Verbindung benachbarter Zellen sein.

Daher ist es aus Forschungs-, Diagnose- und Wartungszwecken von Interesse, die Stromverteilung in einer Zelle messen zu können. Es existieren verschiedene invasive Methoden, um die Stromverteilung in einer Zelle zu bestimmen. In [CDWG98] stellen die Autoren den *Printed Circuit Board Approach* (PCB) vor, bei dem die Katalysator- und Gasdiffusionsschicht und der Stromsammeler auf der Anode segmentiert und die Segmentströme über eine Platine abgeleitet und gemessen werden. Der *Partial MEA Approach* aus [SCW⁺98] besteht darin, drei MEAs zu verwenden, von denen eine über die ganze Fläche und die beiden anderen nur zu einem beziehungsweise zwei Dritteln mit Katalysator beschichtet wurden. Die Reaktivität der einzelnen Bereiche kann dann durch

Differenzbildung ermittelt werden. Dieses Verfahren bietet allerdings nur eine niedrige räumliche Auflösung.

Ebenfalls in [SCW⁺98] stellen die Autoren die *Subcell-Methode* vor. Dort werden an definierten Stellen aus Anode und Kathode Kreise mit einem Durchmesser von 10 mm ausgestanzt und durch geringfügig kleinere ersetzt, die dann zur restlichen Zelle elektrisch isoliert werden. Diese Subzellen können dadurch unabhängig von der restlichen Zelle betrieben werden. Dieses Verfahren bietet eine hohe räumliche Auflösung, allerdings kann die gesamte MEA-Fläche so nicht abgedeckt werden.

Ein Verfahren, das hohe räumliche Auflösung und Abdeckung der kompletten MEA miteinander verbindet, ist das ebenfalls in [SCW⁺98] vorgestellte *Current Distribution Mapping*. Bei diesem Messverfahren werden Graphitblöcke zwischen MEA und dem Stromsammler eingebracht und der Spannungsabfall gemessen. Hierbei sind auch zeitabhängige Phänomene messbar. Diese Methode wurde in [WHG00] verbessert, indem der Strömungsverteiler segmentiert wurde, um den Strom senkrecht zur MEA abzuleiten und damit das Auftreten von lateralen Strömen, die das Messergebnis verfälschen, zu verhindern. Zusätzlich wird bei diesem Ansatz der Strom kontaktlos mit Hall-Sensoren gemessen. Die Segmentierung des Strömungverteilers hat sich als die flexibelste und zuverlässigste Methode herausgestellt, um die Stromverteilung in einer Brennstoffzelle zu messen.

In [HMK⁺08] kombinieren die Autoren in einer PEFC Neutronen-Radiographie mit segmentierter Stromverteilungsmessung, um die Wasserverteilung in Zusammenhang mit der Stromverteilung zu messen.

Diese Methoden zur Bestimmung der Stromverteilung in Brennstoffzellen sind alle invasiv, das heißt, sie verändern den Zellaufbau dadurch, dass Messvorrichtungen eingebracht werden. Im Stackbetrieb resultiert daraus der Nachteil, dass beim Zusammenbau festgelegt werden muss, in welcher Zelle die Stromverteilung gemessen werden soll. Eine De- und Remontage des Stacks kann Undichtigkeiten hervorrufen. Darüber hinaus muss für jede Zellgeometrie ein spezielles Messinstrument gefertigt werden. Außerdem ist es möglich, dass sich eine so veränderte Zelle anders verhält als eine unveränderte und daher ein systematisch verfälschtes Messergebnis liefert.

Im Gegensatz dazu stellt die in dieser Arbeit untersuchte Magnetotomographie ein nicht-invasives Verfahren zur Bestimmung der Stromverteilung in einer Brennstoffzelle dar. Der Stromfluss einer Zelle erzeugt ein Magnetfeld,

das außerhalb der Brennstoffzelle gemessen werden kann. Das äußere Magnetfeld wird quasi als Fingerabdruck der Stromverteilung in der Brennstoffzelle genutzt. Diese Technik wurde in [HPWS05] vorgestellt, Messvorrichtung und -methode beschrieben und die prinzipielle Durchführbarkeit durch Vergleich mit Referenzmessung mit segmentiertem Strömungsverteiler gezeigt.

Die Grundlage der Magnetotomographie für Brennstoffzellen ist das Biot-Savart-Gesetz

$$H(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{j(y) \times (x - y)}{|x - y|^3} dy, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

mit dem sich bei gegebener Stromverteilung j in der Brennstoffzelle Ω das Magnetfeld im ganzen Raum berechnen lässt. Die Rekonstruktion der Stromverteilung aus dem Magnetfeld ist allerdings nicht eindeutig. Es existieren Stromverteilungen, die kein Magnetfeld im Außenraum erzeugen. Ein Beispiel für eine solche Stromverteilung ist eine unendlich dicht auf einen Torus gewickelte Spule, die Ringkernspule genannt wird. In [KKP02] zeigen die Autoren die Nicht-Eindeutigkeit des Problems, indem ein Unterraum des Nullraums des Biot-Savart-Operators charakterisiert wird. Zusätzlich wird gezeigt, dass das Problem eindeutig lösbar ist, wenn die Ströme gewisse Richtungsvoraussetzungen erfüllen. In [PK03] wird die Konvergenz des mit finiter Integration diskretisierten Problems gegen die Lösung des kontinuierlichen Problems gezeigt.

In [HKP05] charakterisieren die Autoren den Nullraum des Biot-Savart-Operators und sein orthogonales Komplement vollständig. Darüber hinaus zeigen sie die Eindeutigkeit der Stromrekonstruktion für diskrete Widerstandnetzwerke. Die Dissertation [Küh05] beschreibt außerdem die Punktquellenmethode zur Feldrekonstruktion im Inneren eines homogenen elektrischen Leiters mit einem homogenen Einschluss mit veränderter Leitfähigkeit. Hierbei wird aus der Kenntnis von $\nu \times E$ auf der Oberfläche des Leiters und dem äußeren Magnetfeld der unbekannte Einschluss rekonstruiert. E bezeichnet dabei das elektrische Feld und ν die Normale an die Oberfläche des Leiters.

Die Diplomarbeit [Tho06] betrachtet das Problem von der physikalischen Seite, indem der Aufbau des Tomographen dokumentiert und die verwendeten Komponenten charakterisiert werden.

Das Problem der Messpunktoptimierung wurde bisher von zwei Seiten untersucht. In der Diplomarbeit [Mar07] wird dazu ein evolutionärer Algorithmus

entwickelt. In [LRSS09] zeigen die Autoren durch die Einführung einer Bewertungsfunktion auf Basis der Singulärwertzerlegung, wie die Anzahl der Messpunkte drastisch reduziert werden kann, ohne dabei an Auflösung zu verlieren.

Diese Arbeit ist wie folgt aufgebaut. In Kapitel 2 führen wir zuerst die mathematischen Konzepte ein, die die Grundlage für die weiteren Kapitel bilden. Darüber hinaus erläutern wir die Maxwell-Gleichungen und das aus ihnen folgende Biot-Savart-Gesetz, die das physikalische Grundgerüst der Messmethode bilden. Den Abschluss bildet die Beschreibung des Tomographen zur Messung des von den Strömen in der Brennstoffzelle erzeugten Magnetfelds.

In Kapitel 3 führen wir detailliert das verwendete Gittermodell ein und stellen dar, wie Ströme in einem diskreten Netzwerk mit Hilfe der Kirchhoff'schen Regeln berechnet werden können. In Abschnitt 3.2 zeigen wir die Zusammenfassung der Tikhonov-Regularisierung mit finiter Integration, die bereits in [Küh05] zur Stromrekonstruktion verwendet wurde. Darauf aufbauend entwickeln wir in den Abschnitten 3.3 und 3.4 zwei neue Rekonstruktionsmethoden, die unterschiedliches Vorwissen über die zugrunde liegende Stromverteilung berücksichtigen. Die erste Methode beinhaltet die Divergenzfreiheit der Ströme, bei der zweiten sind die Basiselemente des Rekonstruktionsraums selbst vollständige Lösungen des Vorwärtsproblems.

Zur numerischen Stabilitätsanalyse der Algorithmen aus Kapitel 3 entwickeln wir in Kapitel 4 ein generisches Konzept, aufbauend auf den Singulärwerten der korrespondierenden Operatoren. Die Basis ist das Courant'sche Minimum-Maximum-Prinzip und wir zeigen, dass sich die Schlechtgestelltheit des Problems signifikant verringert, je mehr Vorwissen berücksichtigt wird. Dazu präsentieren wir Rekonstruktionen, die dieses Resultat bestätigen und untersuchen, wie sich die Schlechtgestelltheit verhält, wenn Parameter wie der Abstand von Sensor zu Messobjekt geändert werden.

Anschließend wenden wir uns dem Nullraum des Biot-Savart-Operators zu. In Kapitel 5 entwickeln wir ein neues Modell, das sich grundlegend von dem in Kapitel 3 beschriebenen Gittermodell unterscheidet. Dieses so genannte Einsicht-System besteht dabei aus einer Schicht, die von zwei parallelen Platten umgeben ist. Die Ströme unterliegen dabei den Restriktionen, dass sie in den Platten flächig, in der Schicht allerdings nur senkrecht zu den Platten fließen können. Ein Mehrschicht-System besteht dann aus mehreren in Reihe geschalteten Einsicht-Systemen und modelliert einen Brennstoffzellenstack,

während das Einschicht-System eine Einzelzelle modelliert. Abschnitt 5.1 widmet sich dabei der detaillierten Definition dieses Modells. Darauf aufbauend beweisen wir im zentralen Satz 5.4 von Abschnitt 5.2, dass die dritte Komponente des Magnetfelds eindeutig in zwei Teilfelder aufgespalten werden kann, die von Strömen in den beiden Platten erzeugt werden. Wir nutzen dabei aus, dass alle Komponenten des Magnetfelds die Laplace-Gleichung erfüllen. Der kurze Abschnitt 5.3 zeigt, dass die Stromverteilung in der Platte eindeutig rekonstruiert werden kann, falls alle drei Magnetfeldkomponenten bekannt sind. Das Hauptresultat dieses Kapitels zeigen wir in Abschnitt 5.4 und insbesondere in Satz 5.13. Dort beweisen wir, dass es zu jeder Stromverteilung auf einer Platte, deren dritte Komponente des von ihr erzeugten Magnetfelds verschwindet, eine divergenzfreie Stromverteilung im ganzen System gibt, die ein Element des Nullraums des Biot-Savart-Operators ist, also kein Magnetfeld im Außenraum erzeugt. Wir erweitern diese Aussage auch auf das Mehrschicht-System. Dieser neue Ansatz zur Charakterisierung des Nullraums des Biot-Savart-Operators bildet eine Möglichkeit, explizit Nullraumelemente für dieses Modell zu konstruieren. In Abschnitt 5.5 führen wir beispielhaft diese Konstruktion durch.

Kapitel 6 dient der Umsetzung der Splitting-Resultate aus dem vorangegangenen Kapitel in einem Peeling-Algorithmus, der hier zum ersten Mal entwickelt wird. Dabei wird in Abschnitt 6.1 durch einen Einfachschichtpotentialansatz die dritte Komponente des Magnetfelds aufgespalten. Anschließend wird in Abschnitt 6.2 das reduzierte Problem gelöst, indem aus der dritten Komponente die Stromverteilung in der Platte rekonstruiert und daraus dann die Stromverteilung in der Schicht berechnet wird. Diese beiden Schritte fassen wir zu einem vollständigen Algorithmus zusammen und präsentieren die Rekonstruktionsergebnisse. Abschließend vergleichen wir Stromrekonstruktionen dieses neuen Algorithmus mit denen der in Kapitel 3 entwickelten.

In Kapitel 7 zeigen wir Rekonstruktionen mit Messdaten. Dabei wird ein Widerstandsnetzwerk neu aufgebaut und mit einer Schiebevorrichtung versehen, um gezielt einzelne Widerstände stromlos zu schalten und so Fehlstellen zu erzeugen. Widerstandsnetzwerke sind die direkte physikalische Entsprechung des in Kapitel 3 vorgestellten Gittermodells und daher prädestiniert, die Algorithmen direkt zu testen.

Abschließend fassen wir in Kapitel 8 die Ergebnisse der Arbeit zusammen und zeigen Ansatzpunkte zur weiteren Bearbeitung des Themas.

Die Inhalte der Kapitel 3 und 4 wurden in kompakter Form bereits in [HPW08] und der Inhalt von Kapitel 5 in [PW09] veröffentlicht.

2 Grundlagen

Die Abschnitte 2.1–2.5 dieses Grundlagenkapitels dienen dazu, die mathematischen Konzepte einzuführen, die wir in den weiteren Kapiteln benötigen. In den Abschnitten 2.6 und 2.7 geben wir einen Überblick über den physikalischen Hintergrund in Form der Maxwell-Gleichungen und zitieren das daraus resultierende Biot-Savart-Gesetz, das den Zusammenhang zwischen Stromverteilung und Magnetfeld herstellt. Im abschließenden Abschnitt 2.8 wird der Tomograph zur Messung der Magnetfelder beschrieben.

2.1 Sobolev-Räume

Sobolev-Räume sind Banach-Räume schwach differenzierbarer Funktionen. Wir skizzieren an dieser Stelle die Konzepte, die wir im weiteren Verlauf der Arbeit benötigen. Für eine umfassende Einführung verweisen wir daher auf [AF03], [GR86] und [McL00]. Die meisten der zitierten Sätze stammen aus diesen Werken. Sofern nicht anders angemerkt, bezeichnet $D \subset \mathbb{R}^d$ eine offene, zusammenhängende, beschränkte Menge mit Lipschitz-stetigem Rand ∂D .

Definition 2.1 Sei u eine Funktion definiert auf D und $0 < r \leq 1$. Dann heißt u *Hölder-stetig mit Exponent r* , wenn

$$\sup_{\substack{x, y \in D \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^r} \quad (2.1)$$

endlich ist. Für $r = 1$ heißt u *Lipschitz-stetig*.

Definition 2.2 Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ offen. Der Rand ∂D ist *Lipschitz-stetig* (beziehungsweise *von der Klasse C^k* oder *C^k -glatt*, $k \in \mathbb{N}_0$), wenn für alle $x_0 \in \partial D$ eine lineare orthogonale Koordinatentransformation $y = Ax$, ein $r > 0$ und eine Lipschitz-stetige (beziehungsweise k -mal stetig differenzierbare) Funktion γ existiert, so dass

$$\begin{aligned} B_r(x_0) \cap D &= \left\{ x = A^{-1}y \in B_r(x_0) : y_d > \gamma(y_1, \dots, y_{d-1}) \right\}, \\ B_r(x_0) \setminus \overline{D} &= \left\{ x = A^{-1}y \in B_r(x_0) : y_d < \gamma(y_1, \dots, y_{d-1}) \right\} \text{ und} \\ B_r(x_0) \cap \partial D &= \left\{ x = A^{-1}y \in B_r(x_0) : y_d = \gamma(y_1, \dots, y_{d-1}) \right\}. \end{aligned}$$

$B_r(x_0)$ bezeichnet dabei die d -dimensionale Kugel mit Radius r um den Punkt x_0 .

Die theoretischen Grundlagen beginnen wir mit der Definition der L^p -Räume.

Definition 2.3 Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ eine zusammenhängende, beschränkte Menge mit Lipschitz-stetigem Rand ∂D . Wie üblich definieren wir mit $L^p(D)$ für $p \geq 1$ den Raum aller Lebesgue-messbaren Funktionen u auf D , für die

$$\int_D |u(x)|^p dx < \infty \quad (2.2)$$

ist.

In $L^p(D)$ identifizieren wir Funktionen miteinander, die fast überall übereinstimmen. Die Elemente von $L^p(D)$ sind also Äquivalenzklassen messbarer Funktionen, die (2.2) erfüllen. Zwei Funktionen sind dabei äquivalent, wenn sie fast überall übereinstimmen. Aus Gründen der Notation verzichten wir an dieser Stelle wie üblich auf die Unterscheidung zwischen Äquivalenzklasse und ihren Repräsentanten.

Mit der Norm

$$\|u\|_{L^p(D)} := \left(\int_D |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

wird $L^p(D)$ zu einem Banach-Raum und $L^2(D)$ ist mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{L^2(D)} := \int_D u(x) v(x) dx$$

sogar ein Hilbert-Raum.

Definition 2.4 Sei $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. u hat *kompakten Träger* in D genau dann, wenn die Menge

$$\text{supp } u := \overline{\{x \in D : u(x) \neq 0\}}$$

kompakt ist und es gilt

$$\text{supp } u \subset D.$$

Da D offen ist, bedeutet dies anschaulich, dass $u = 0$ in einer Umgebung des Randes ist. Um schwache Ableitungen für L^2 -Funktionen definieren zu können, benötigen wir noch Räume von *Testfunktionen*.

Definition 2.5 Sei $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ ein Multiindex. Wir definieren

$$D^\alpha \varphi := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_d} x_d} \varphi$$

und $|\alpha| := \sum_{i=1}^d \alpha_i$. Damit können wir die folgenden Räume definieren. Mit $C^0(D)$ bezeichnen wir den Raum der stetigen Funktionen in D und definieren

$$C^m(D) := \left\{ \varphi \in C^0(D) : D^\alpha \varphi \in C^0(D) \text{ für alle } |\alpha| \leq m \right\}$$

als den Raum der m -fach stetig differenzierbaren Funktionen und

$$C_0^m(D) := \{ \varphi \in C^m(D) : \text{supp } \varphi \text{ ist kompakt in } D \}$$

als den Raum der m -fach stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger. Da C^m -Funktionen nicht notwendigerweise beschränkt sind, definieren wir noch

$$C^m(\overline{D}) := \left\{ \varphi|_D : \varphi \in C_0^m(\mathbb{R}^d) \right\}$$

als Raum der beschränkten, gleichmäßig m -fach stetig differenzierbaren Funktionen.

Den Raum aller Funktionen φ in D , deren Ableitungen $D^\alpha \varphi$ für $0 \leq \alpha \leq m$ die Bedingung (2.1) erfüllen, bezeichnen wir mit $C^{m,r}(\overline{D})$, $0 < r \leq 1$.

Definition 2.6 Sei $u \in L^2(D)$ und $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ ein Multiindex. Eine Funktion $v \in L^2(D)$ heißt α -te *schwache Ableitung* von u , falls für alle

Testfunktionen $\varphi \in C_0^\infty(D)$

$$\int_D u(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_D v(x) \varphi(x) dx$$

gilt.

Wenn u eine Ableitung im klassischen Sinne besitzt, dann stimmt sie mit der schwachen Ableitung überein. Existiert eine schwache Ableitung, so ist sie eindeutig bestimmt.

Wir definieren jetzt für $m \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p < \infty$ den *Sobolev-Raum*

$$W^{m,p}(D) := \{u \in L^p(D) : D^\alpha u \in L^p(D) \text{ für alle } |\alpha| \leq m\}.$$

Mit der Norm

$$\|u\|_{W^{m,p}(D)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_D |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

wird $W^{m,p}(D)$ zu einem Banach-Raum. $W^{m,2}(D)$ wird mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{W^{m,2}(D)} := \sum_{|\alpha| \leq m} \int_D D^\alpha u D^\alpha v dx \quad (2.3)$$

sogar zu einem Hilbert-Raum und üblicherweise mit $H^m(D)$ bezeichnet. Die durch (2.3) induzierte Norm bezeichnen wir mit $\|\cdot\|_{H^m(D)}$.

Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten, Sobolev-Räume zu definieren. Der klassische Sobolev-Raum $H^m(D)$ ist definiert als die Vervollständigung von $C^m(D)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{H^m(D)}$. In [MS64] zeigen die Autoren die Äquivalenz der beiden Definitionen.

Wir erweitern diese Definition der Sobolev-Räume auf nicht-ganzzahlige Indizes.

Definition 2.7 Sei $s > 0$ und $s = m + r$ mit $m \in \mathbb{N}_0$ und $0 < r < 1$. Dann definieren wir $H^s(D)$ als den Raum aller Funktionen $u \in H^m(D)$, für die

$$\int_D \int_D \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x - y|^{d+2r}} dx dy < \infty \quad \text{für alle } |\alpha| = m$$

gilt. Mit dem Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_{H^s(D)} &:= \langle u, v \rangle_{H^m(D)} \\ &+ \sum_{|\alpha|=m} \int_D \int_D \frac{\langle D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y), D^\alpha v(x) - D^\alpha v(y) \rangle}{|x - y|^{d+2r}} dx dy \end{aligned}$$

ist $H^s(D)$ ebenfalls ein Hilbert-Raum.

Alternativ können die Sobolev-Räume $H^s(\mathbb{R}^d)$ für $s \in \mathbb{R}$ auch mit Hilfe der Fourier-Transformation

$$(\mathcal{F}u)(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} u(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^d$$

definiert werden. Funktionen des Sobolev-Raums

$$H^s(\mathbb{R}^d) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^d) : (1 + \xi^2)^{s/2} \mathcal{F}u(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d) \right\}$$

werden dann dadurch charakterisiert, dass sie im Unendlichen ein gewisses Abfallverhalten erfüllen. $H^s(D)$ ist dann durch

$$H^s(D) := \left\{ u \in L^2(D) : \exists \hat{u} \in H^s(\mathbb{R}^d) \text{ mit } \hat{u}|_D = u \right\}$$

gegeben. In [McL00] wird in Theorem 3.18 gezeigt, dass auch diese Definition zur obigen äquivalent ist.

Diese alternative Definition über die Fourier-Transformation definiert Sobolev-Räume auch für einen negativen Index s . Wir charakterisieren diese Räume noch als Dualräume von Sobolev-Räumen mit positivem Index.

Satz 2.8 Für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$H^s(D)^* = \tilde{H}^{-s}(D) \quad \text{und} \quad \tilde{H}^s(D)^* = H^{-s}(D)$$

mit

$$\tilde{H}^s(D) := \overline{C_0^\infty(D)}^{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

BEWEIS. Ein Beweis findet sich in [McL00], Theorem 3.30. □

Wir zitieren noch einige Dichtheits- und Einbettungssätze. Dabei ist ein normierter Raum X in einen normierten Raum Y *eingebettet* und wir schreiben

$X \hookrightarrow Y$, falls X ein Unterraum von Y ist und die Abbildung $I: X \rightarrow Y$ mit $Ix = x$ für alle $x \in X$ stetig ist.

Satz 2.9 *Sei D ein Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand. Dann gelten*

- $C_0(D)$ ist dicht in $L^p(D)$ für $1 \leq p \leq \infty$,
- $C_0^\infty(D)$ ist dicht in $L^p(D)$ für $1 \leq p \leq \infty$ und
- $C^\infty(\overline{D})$ ist dicht in $H^s(D)$ für $s \geq 0$.

BEWEIS. Die Beweise finden sich in [AF03], Theorem 2.19, Corollary 2.30 und [McL00], Theorem 3.29. □

Satz 2.10 (Sobolev'scher Einbettungssatz) *Sei $m \in \mathbb{N}_0$ und $l \in \mathbb{N}$. Falls $2l > d > 2l - 2$, dann gilt die Einbettung*

$$H^{m+l}(D) \hookrightarrow C^{m,r}(\overline{D}) \quad \text{für } 0 < r \leq l - \frac{d}{2}.$$

BEWEIS. Ein Beweis findet sich in [AF03], Theorem 4.12. □

Für $d = 3$ gilt also insbesondere

$$H^{2+m}(D) \hookrightarrow C^{m,r}(\overline{D}) \quad \text{für } 0 < r \leq \frac{1}{2}.$$

Aus der Definition der Sobolev-Räume ist es zuerst einmal nicht möglich, Randwerte für Funktionen zu definieren. Für eine stetige Funktion $\varphi \in C(\overline{D})$ sind die Randwerte durch $\varphi|_{\partial D}$ gegeben. Da der ∂D eine Nullmenge darstellt, auf der zwei Repräsentanten derselben Äquivalenzklasse in L^2 unterschiedliche Funktionswerte annehmen können, definieren wir Randwerte für Funktionen in Sobolev-Räumen über *Spurooperatoren*.

Satz 2.11 *Wir definieren den Spuroperator $T: C^\infty(\overline{D}) \rightarrow C^\infty(\partial D)$ als Einschränkung*

$$Tu := u|_{\partial D}.$$

Für D mit $C^{m-1,1}$ -stetigem Rand und $\frac{1}{2} < s \leq m$ hat T eine eindeutige Erweiterung zu einem beschränkten linearen Operator

$$T: H^s(D) \rightarrow H^{s-\frac{1}{2}}(\partial D).$$

Diese Erweiterung ist surjektiv und hat eine stetige Rechtsinverse. Es gilt

$$\|Tu\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\partial D)} \leq C\|u\|_{H^s(D)}$$

für $u \in C^\infty(\overline{D})$.

BEWEIS. Ein Beweis findet sich in [McL00], Theorem 3.37. □

Für D mit Lipschitz-stetigem Rand gilt also insbesondere, dass die Abbildung $T: H^1(D) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ beschränkt ist.

An dieser Stelle weisen wir darauf hin, dass im weiteren Verlauf der Arbeit immer Randwerte von Funktionen in Sobolev-Räumen im Sinne des Spuroperators zu verstehen sind, wir aber aus Gründen der Übersichtlichkeit auf diese Notation verzichten.

Nachdem wir die Räume skalarer Funktionen eingeführt haben, wenden wir uns jetzt Sobolev-Räumen vektorwertiger Funktionen zu. Der Produktraum $H^s(D)^3$ ist mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{H^s(D)^3} := \sum_{i=1}^3 \langle u_i, v_i \rangle_{H^s(D)}$$

für die Vektorfelder $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in H^s(D)^3$ ein Hilbert-Raum. Für ein Feld $u \in L^2(D)^3$ definieren wir die *schwache Divergenz* $\operatorname{div} u$ als Funktion, für die

$$\int_D \varphi \operatorname{div} u \, dx = \int_D u \cdot \operatorname{grad} \varphi \, dx$$

für alle Testfunktionen $\varphi \in C_0^\infty(D)$ erfüllt ist. Entsprechend definieren wir die *schwache Rotation* $\operatorname{curl} u$ als Vektorfeld, für das

$$\int_D \varphi \cdot \operatorname{curl} u \, dx = \int_D u \cdot \operatorname{curl} \varphi \, dx$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(D)^3$ erfüllt ist. Die Räume

$$H_{\operatorname{div}}(D) := \left\{ u \in L^2(D)^3 : \operatorname{div} u \in L^2(D) \right\}$$

und

$$H_{\operatorname{curl}}(D) := \left\{ u \in L^2(D)^3 : \operatorname{curl} u \in L^2(D)^3 \right\}$$

sind Unterräume von $H^1(D)^3$. $H_{\text{div}}(D)$ und $H_{\text{curl}}(D)$ werden mit den Skalarprodukten

$$\langle u, v \rangle_{H_{\text{div}}(D)} := \langle u, v \rangle_{L^2(D)^3} + \langle \text{div } u, \text{div } v \rangle_{L^2(D)}$$

beziehungsweise

$$\langle u, v \rangle_{H_{\text{curl}}(D)} := \langle u, v \rangle_{L^2(D)^3} + \langle \text{curl } u, \text{curl } v \rangle_{L^2(D)^3}$$

zu Hilbert-Räumen. Die Unterräume

$$H_{\text{div}=0}(D) := \{u \in H_{\text{div}}(D) : \text{div } u = 0\}$$

und

$$H_{\text{curl}=0}(D) := \{u \in H_{\text{curl}}(D) : \text{div } u = 0\}$$

sind mit dem üblichen L^2 -Skalarprodukt für vektorwertige Funktionen ebenfalls Hilbert-Räume. Zum Abschluss zitieren wir noch folgendes Dichtheitsresultat:

Satz 2.12 *Der Raum $C^\infty(\overline{D})^3$ ist dicht sowohl in $H_{\text{div}}(D)$ als auch in $H_{\text{curl}}(D)$.*

BEWEIS. Ein Beweis findet sich in [GR79], Theoreme 2.4 und 2.10. $\square$

2.2 Potentialtheorie

Dieser Abschnitt dient dazu, einige grundlegende Ergebnisse aus der Potentialtheorie zusammenzufassen und die Begriffe einzuführen, die wir in den weiteren Kapiteln benötigen. Wir folgen dabei der Darstellung in [Kre99] und [CK98] und beschränken uns auf den dreidimensionalen Fall. Für einen tieferen Einblick in die Materie verweisen wir neben den beiden genannten Werken zusätzlich auf [Mar68].

Die *Potentialtheorie* ist die Theorie harmonischer Vektorfelder und Funktionen. Dabei wird eine zweimal stetig differenzierbare Funktion u auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^3$ *harmonisch* genannt, wenn sie die *Laplace-Gleichung*

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } D$$

mit dem *Laplace-Operator*

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

erfüllt.

Diese Gleichung ist nach dem französischen Mathematiker und Astronomen Pierre-Simon Laplace (1749–1827) benannt, der als Erster ihre Eigenschaften studierte. Die Laplace-Gleichung stellt den einfachsten Fall einer elliptischen Differentialgleichung dar. Ihre Lösungen sind in vielen Bereichen der Wissenschaft von Bedeutung, wobei die Newton'sche Gravitationstheorie, die Isaac Newton 1687 in seinem Hauptwerk *Philosophiae naturalis principia mathematica* veröffentlichte, eine der populärsten Anwendungen ist. Das Gravitationsfeld kann dabei als Gradient eines Gravitationspotentials aufgefasst werden, und daher existiert eine enge Verbindung zwischen der Berechnung des Gravitationsfelds eines Systems von Körpern und dem Lösen der Laplace-Gleichung.

Fast genau 100 Jahre später entwickelte der französische Physiker Charles-Augustin de Coulomb die Theorie über die Kraft zwischen zwei kugelsymmetrisch verteilten elektrischen Ladungen und bestätigte sie experimentell mit einer von ihm 1784 entwickelten Torsionswaage. Dieses *Coulomb'sche Gesetz* ist das Grundgesetz der Elektrostatik und besagt, dass der Betrag der wirkenden Kraft proportional zum Produkt der beiden Ladungsmengen und umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes der Kugelmittelpunkte ist. Analog zum Gravitationsfeld kann auch dieses Kraftfeld wieder als Gradient eines Potentials dargestellt werden, das Lösung der Laplace-Gleichung ist.

Neben diesen beiden Anwendungen beschreibt die Laplace-Gleichung auch den stationären Fall der Wärmeleitungsgleichung.

Definition 2.13 Die Funktion

$$\Phi(x, y) := \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - y|} \quad (2.4)$$

ist für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ mit $x \neq y$ definiert und heißt *Grundlösung* der Laplace-Gleichung.

Durch elementares Differenzieren ist leicht nachzurechnen, dass $\Phi(\cdot, y)$ für festes $y \in \mathbb{R}^3$ harmonisch bezüglich x in $\mathbb{R}^3 \setminus \{y\}$ ist.

Die folgenden Sätze stellen einen Zusammenhang zwischen den Randwerten harmonischer Funktionen und ihren Werten im Inneren des Gebiets her.

Satz 2.14 (Green'sche Sätze) Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit Rand ∂D der Klasse C^1 und sei v der Einheitsnormalenvektor, der in das Äußere von D zeigt. Dann gilt für $u \in C^1(\overline{D})$ und $v \in C^2(\overline{D})$ der erste Green'sche Satz

$$\int_D (u \triangle v + \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) \, dx = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial \nu} \, ds$$

und für $u, v \in C^2(\overline{D})$ haben wir den zweiten Green'schen Satz

$$\int_D (u \triangle v - v \triangle u) \, dx = \int_{\partial D} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \, ds.$$

BEWEIS. Ein Beweis findet sich in [Kre99], Theorem 6.3. □

Satz 2.15 (Green'sche Darstellungsformel) Sei D wie in Satz 2.14 und sei $u \in C^2(\overline{D})$ harmonisch in D . Dann gilt

$$u(x) = \int_{\partial D} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right) \, ds(y), \quad x \in D.$$

BEWEIS. Ein Beweis findet sich in [Kre99], Theorem 6.5. □

Aus der Green'schen Darstellungsformel schließen wir, dass harmonische Funktionen analytisch sind (siehe [Kre99], Theorem 6.6).

Der folgende Satz ist für die Eindeutigkeitsaussagen zu Randwertproblemen wichtig.

Satz 2.16 (Maximum-Minimum-Prinzip) Eine in einem Gebiet nicht konstante harmonische Funktion besitzt kein Minimum und kein Maximum.

BEWEIS. Ein Beweis findet sich in [Kre99], Theorem 6.8. □

Korollar 2.17 Sei D ein beschränktes Gebiet und sei u harmonisch in D und stetig in $\overline{D}$. Dann nimmt u sowohl sein Minimum als auch sein Maximum auf dem Rand an.

Wir skizzieren an dieser Stelle kurz die klassischen Randwertprobleme zur Laplace-Gleichung. Dazu betrachten wir ein beschränktes Gebiet $D \subset \mathbb{R}^3$ mit C^2 -glattem, zusammenhängendem Rand ∂D . Mit ν bezeichnen wir die Einheitsnormale, die in das Äußere von D gerichtet ist.

Inneres Dirichlet-Problem Bestimme eine Funktion u , die harmonisch in D und stetig in $\overline{D}$ ist und die Randbedingung

$$u = f \quad \text{auf } \partial D$$

mit einer stetigen Funktion f erfüllt.

Inneres Neumann-Problem Bestimme eine Funktion u , die in D harmonisch und stetig in $\overline{D}$ ist und die Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad \text{auf } \partial D$$

erfüllt im Sinne

$$\lim_{h \rightarrow +0} \nu(x) \cdot \text{grad } u(x - h\nu(x)) = g(x) \quad \text{auf } \partial D$$

gleichmäßiger Konvergenz auf ∂D mit einer stetigen Funktion g .

Äußeres Dirichlet-Problem Bestimme eine Funktion u , die harmonisch in $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ und stetig in $\mathbb{R}^3 \setminus D$ ist und die Randbedingung

$$u = f \quad \text{auf } \partial D$$

mit einer stetigen Funktion f erfüllt. Für $\|x\| \rightarrow \infty$ wird zusätzlich gefordert, dass die Bedingung

$$u(x) = o(1)$$

gleichmäßig für alle Richtungen erfüllt ist.

Äußeres Neumann-Problem Bestimme eine Funktion u , die harmonisch in $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ und stetig in $\mathbb{R}^3 \setminus D$ ist und die Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad \text{auf } \partial D$$

im Sinne gleichmäßiger Konvergenz mit einer stetigen Funktion g erfüllt. Für $\|x\| \rightarrow \infty$ wird zusätzlich gefordert, dass die Bedingung

$$u(x) = o(1)$$

gleichmäßig für alle Richtungen erfüllt ist.

Zur Eindeutigkeit der Lösungen der Randwertprobleme fassen wir ohne Beweis die Theoreme 6.11 und 6.12 aus [Kre99] zusammen.

Satz 2.18 *Das innere und äußere Dirichlet-Problem und das äußere Neumann-Problem haben höchstens eine Lösung. Zwei Lösungen des inneren Neumann-Problems unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante.*

In Kapitel 5 werden wir die Eindeutigkeit eines weiteren Neumann-Problems zur Laplace-Gleichung benötigen.

Satz 2.19 (Eindeutigkeit des äußeren Neumann-Problems im Halbraum)

Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ ein Halbraum mit Normalenvektor v , der in das Innere von U zeigt und sei $u \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$ eine Lösung der Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } U$$

mit der Neumann-Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial v} = 0 \quad \text{auf } \partial U \tag{2.5}$$

und der Abfall-Bedingung

$$|u(y)| = o(1), \quad \|y\| \rightarrow \infty \tag{2.6}$$

gleichmäßig in alle Richtungen. Dann ist u identisch Null in U .

BEWEIS. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $U = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$, U ist also der Halbraum mit positiver y_3 -Komponente. Wir wenden das *Reflexionsprinzip* an, das heißt, wir erweitern u in den gesamten $\mathbb{R}^3$ durch

$$u(y) := u(y'), \quad y \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^-,$$

wobei $y' := (y_1, y_2, -y_3)$. Diese an ∂U gespiegelte Funktion ist stetig in $\mathbb{R}^3$ und erfüllt die Laplace-Gleichung in U und $\mathbb{R}^3 \setminus U$. Wir berechnen

$$\frac{\partial u}{\partial y_3}(y) = -\frac{\partial u}{\partial y_3}(y'), \quad y \in \mathbb{R}^3.$$

Wegen der homogenen Randbedingung (2.5) besitzt das Potential u eine stetige Normalableitung auf ∂U . Daraus schließen wir, dass u eine Lösung der Laplace-Gleichung in ganz $\mathbb{R}^3$ ist. Um dieses Argument detailliert auszuführen, wenden wir die Green'sche Darstellungsformel auf u in einer Kugel B

an. In jedem der Teilgebiete $B_1 := B \cap U$ und $B_2 := B \cap (\mathbb{R}^3 \setminus U)$ erfüllt u die Laplace-Gleichung und wir können daher u darstellen als

$$u(x) = \int_{\partial B_1} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y) \\ + \int_{\partial B_2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y), \quad (2.7)$$

wobei ν den nach außen gerichteten Normalenvektor an ∂B_1 beziehungsweise ∂B_2 bezeichnet. Für die Integrale in (2.7) auf dem gemeinsamen Rand $S := B \cap \partial U$ verschwinden die ersten Terme in beiden Integralen und die zweiten Terme haben denselben Betrag, aber durch die unterschiedlichen Normalenrichtungen entgegengesetzte Vorzeichen. Daher erhalten wir

$$u(x) = \int_{\partial B} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \nu} \Phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y), \quad x \in B,$$

das heißt, u ist glatt in B und erfüllt die Laplace-Gleichung. Wir haben nun eine vollständige Lösung der Laplace-Gleichung, die die Abfallbedingung (2.6) erfüllt. Aus dem Maximum-Prinzip, angewandt auf φ in der Kugel $B_R(0)$ mit Radius R , erhalten wir

$$|u(x)| \leq o(1), \quad x \in B_R(0).$$

Durch Grenzwertbildung für $R \rightarrow \infty$ ergibt sich nun $u \equiv 0$. □

2.3 Funktionalanalysis und schlecht gestellte Probleme

In den weiteren Kapiteln dieser Arbeit werden wir *schlecht gestellte Probleme* behandeln. Dieser Begriff geht auf Jacques Salomon Hadamard (1865–1963) zurück, der in [Had52] ein Problem gut oder korrekt gestellt (*well-posed*) nennt, falls

- eine Lösung des Problems existiert,
- die Lösung eindeutig ist und
- sie stetig von den Daten abhängt.

Ist eine der Bedingungen verletzt, heißt ein Problem schlecht oder inkorrekt gestellt (*ill-posed*).

Eine Operatorgleichung

$$A\varphi = f$$

mit einem Operator $A: U \rightarrow V$ von einer Teilmenge U eines normierten Raums X in eine Teilmenge V eines normierten Raums Y ist also gut gestellt, wenn A bijektiv und der inverse Operator $A^{-1}: V \rightarrow U$ stetig ist. Andernfalls ist sie schlecht gestellt.

Definition 2.20 Ein linearer Operator $A: X \rightarrow Y$ von einem normierten Raum X in einen normierten Raum Y ist *kompakt*, wenn er jede beschränkte Menge in X in eine relativ kompakte Menge in Y abbildet.

Die Theorie kompakter Operatoren ist eng mit schlecht gestellten Problemen verknüpft.

Satz 2.21 Sei $A: X \rightarrow Y$ ein kompakter linearer Operator. Dann ist die Gleichung erster Art

$$A\varphi = f$$

schlecht gestellt im Sinne von Hadamard, falls X nicht endlich dimensional ist.

BEWEIS. Wir nehmen an, die Gleichung ist gut gestellt und $A^{-1}: Y \rightarrow X$ existiert und ist stetig. Dann ist $I = A^{-1}A$ ebenfalls kompakt, da das Produkt eines stetigen linearen Operators mit einem kompakten wieder kompakt ist (siehe Theorem 2.16 in [Kre99]). Nach Theorem 2.20 in [Kre99] ist die Identität genau dann kompakt, wenn X endlich dimensional ist. Daher kann A^{-1} nicht stetig sein und die Gleichung erster Art ist schlecht gestellt. $\square$

Um für schlecht gestellte Probleme eine stabile approximative Lösung zu erlangen, müssen sogenannte Regularisierungsmethoden angewendet werden. Die *Tikhonov-Regularisierung* (siehe [Tik62]) ist eine Methode zur stabilen Lösung schlecht gestellter Probleme mit weit gestreuten Anwendungsfeldern. Die grundlegende Idee besteht darin, den unbeschränkten Operator A^{-1} durch eine Familie beschränkter Operatoren R_α mit dem Regularisierungsparameter α zu approximieren. Für eine umfassende Darstellung verweisen wir auf [Kre99].

Satz 2.22 Seien X und Y Hilbert-Räume und sei $A: X \rightarrow Y$ ein kompakter linearer Operator. Dann ist für jedes $\alpha > 0$ der Operator $(\alpha I + A^*A): X \rightarrow X$ bijektiv und hat eine beschränkte Inverse. Wir nennen $\varphi_\alpha := R_\alpha f$ mit dem Operator

$$R_\alpha := (\alpha I + A^*A)^{-1}A^*$$

die Tikhonov-Lösung mit Regularisierungsparameter α von $A\varphi = f$. Zusätzlich ist $\varphi_\alpha := R_\alpha f$ der eindeutige Minimierer des Funktionals

$$\mu_\alpha(\varphi) := \|A\varphi - f\|_Y^2 + \alpha \|\varphi\|_X^2.$$

Falls A injektiv ist und φ die Gleichung $A\varphi = f$ erfüllt, haben wir punktweise Konvergenz

$$\varphi_\alpha \rightarrow \varphi, \quad \alpha \rightarrow 0.$$

BEWEIS. Ein Beweis findet sich in [Kre99], Theorem 16.1. □

Satz 2.22 liefert nur eine Konvergenzaussage für den Fall, dass A injektiv ist. In Abschnitt 2.7 werden wir zeigen, dass der Biot-Savart-Operator allerdings einen nicht-trivialen Nullraum besitzt. Daher schließen wir folgende Bemerkung an:

Bemerkung 2.23 Falls A nicht injektiv ist, bildet der Operator R_α auf den Raum $N(A)^\perp$ ab und wir haben punktweise Konvergenz

$$\varphi_\alpha \rightarrow P\varphi, \quad \alpha \rightarrow 0$$

mit der orthogonalen Projektion P von X auf $N(A)^\perp$.

Satz 2.24 Für einen beschränkten linearen Operator A gilt

$$A(X)^\perp = N(A^*) \quad \text{und} \quad N(A^*)^\perp = \overline{A(X)}.$$

BEWEIS. Ein Beweis findet sich in [CK98], Theorem 4.6. □

Die Analyse der Operatoren in Kapitel 4 basiert auf ihren Singulärwerten, die wir an dieser Stelle definieren und einige Darstellungssätze zitieren.

Definition 2.25 Seien X und Y Hilbert-Räume, $A: X \rightarrow Y$ ein kompakter linearer Operator und sei $A^*: Y \rightarrow X$ der zu A adjungierte Operator. Die nicht-negativen Quadratwurzeln der Eigenwerte des nicht-negativen selbst-adjungierten Operators $A^*A: X \rightarrow X$ werden *Singulärwerte* von A genannt.

Satz 2.26 Sei (μ_n) die Folge der nicht verschwindenden, nach ihrer Vielfachheit wiederholten Singulärwerte des kompakten linearen Operators A (mit $A \neq 0$). Dann existieren orthonormale Folgen (φ_n) in X und (g_n) in Y , so dass

$$A\varphi_n = \mu_n g_n, \quad A^* g_n = \mu_n \varphi_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $\varphi \in X$ haben wir die Singulärwertzerlegung

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi, \varphi_n \rangle \varphi_n + Q\varphi \quad (2.8)$$

mit der orthogonalen Projektion $Q: X \rightarrow N(A)$ und

$$A\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle \varphi, \varphi_n \rangle g_n. \quad (2.9)$$

Jedes System (μ_n, φ_n, g_n) mit diesen Eigenschaften wird singuläres System von A genannt. Falls A nur endlich viele Eigenwerte besitzt, degenerieren die Reihen in (2.8) und (2.9) zu endlichen Summen.

BEWEIS. Ein Beweis findet sich in [Kre99], Theorem 15.16. □

Satz 2.27 (Spektralsatz für selbstadjungierte kompakte Operatoren) Sei X ein Hilbert-Raum und $A: X \rightarrow X$ ein selbstadjungierter kompakter Operator mit $A \neq 0$. Dann sind alle Eigenwerte von A reell. A hat mindestens einen Eigenwert verschieden von Null und eine höchstens abzählbare Menge von Eigenwerten, die sich bei Null häufen. Alle Eigenräume $N(\lambda I - A)$ zu Eigenwerten $\lambda \neq 0$ sind endlich dimensional und Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal. Wir nehmen an, dass die Folge (λ_n) der von Null verschiedenen Eigenwerte so geordnet ist, dass

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots$$

und bezeichnen mit $P_n: X \rightarrow N(\lambda_n I - A)$ die orthogonale Projektion auf den Eigenraum zum Eigenwert λ_n . Dann ist

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n \quad (2.10)$$

im Sinne der Normkonvergenz. Sei $Q: X \rightarrow N(A)$ die orthogonale Projektion auf den Nullraum $N(A)$. Dann ist

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \varphi + Q\varphi \quad (2.11)$$

für alle $\varphi \in X$. Falls A nur endlich viele Eigenwerte besitzt, degenerieren die Reihen in (2.10) und (2.11) zu endlichen Summen.

BEWEIS. Ein Beweis findet sich in [Kre99], Theorem 15.12. $\square$

Der folgende Satz zeigt den Zusammenhang zwischen der Schlechtgestellttheit einer Gleichung und den Singulärwerten des Operators.

Satz 2.28 (Satz von Picard) Sei $A: X \rightarrow Y$ ein kompakter linearer Operator mit singulärem System (μ_n, φ_n, g_n) . Die Gleichung erster Art

$$A\varphi = f$$

ist genau dann lösbar, wenn $f \in N(A^*)^\perp$ und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} |\langle f, g_n \rangle|^2$$

endlich ist. In diesem Fall ist die Lösung durch

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} \langle f, g_n \rangle \varphi_n \quad (2.12)$$

gegeben.

BEWEIS. Ein Beweis findet sich in [Kre99], Theorem 15.18. $\square$

In (2.12) wird deutlich, dass die Stabilität der Lösung der Gleichung davon abhängt, wie die Singulärwerte von A gegen Null streben. Wir sagen, die Gleichung ist *mild schlecht gestellt*, falls die Singulärwerte von A langsam gegen Null streben und sie ist *stark schlecht gestellt*, falls sie sehr schnell gegen Null streben.

Der folgende Satz ermöglicht es uns, die Kompaktheit der im folgenden Abschnitt 2.4 auf Räumen stetiger Funktionen definierten Operatoren auf L^2 -Räume zu übertragen.

Satz 2.29 (Lax) Seien X und Y normierte Räume, die beide mit einem Skalarprodukt ausgestattet sind. Wir nehmen an, dass eine positive Konstante c existiert, so dass

$$|\langle \varphi, \psi \rangle| \leq c \|\varphi\| \|\psi\|$$

für alle $\varphi, \psi \in X$. Seien $A: X \rightarrow Y$ und $B: Y \rightarrow X$ beschränkte lineare Operatoren, die

$$\langle A\varphi, \psi \rangle_Y = \langle \varphi, B\psi \rangle_X$$

für alle $\varphi \in X$ und $\psi \in Y$ erfüllen. Dann ist $A: X \rightarrow Y$ beschränkt bezüglich der von den Skalarprodukten induzierten Norm $\|\cdot\|_s$ und es gilt

$$\|A\|_s^2 \leq \|A\| \|B\|.$$

BEWEIS. Ein Beweis findet sich in [Kre99], Theorem 4.11. □

2.4 Integraloperatoren

Mit Hilfe der Grundlösung (2.4) können wir nun Oberflächen- und Volumenpotentiale definieren und ihre Eigenschaften festhalten.

Definition 2.30 Sei $\varphi \in C(\partial D)$. Die Funktion

$$u(x) := \int_{\partial D} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D$$

heißt *Einfachschichtpotential* mit Dichte φ .

Für $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D$ können wir Integration und Differentiation vertauschen und erhalten, dass u sowohl in D als auch in $D_e := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ harmonisch ist. Das Verhalten auf dem Rand charakterisiert der folgende Satz.

Satz 2.31 (Sprungbeziehungen für das Einfachschichtpotential) Sei ∂D von der Klasse C^2 und sei φ stetig. Dann ist das Einfachschichtpotential u mit Dichte φ überall in $\mathbb{R}^3$ stetig und es gilt

$$\|u\|_{\infty, \mathbb{R}^3} \leq C \|\varphi\|_{\infty, \partial D}$$

für eine von ∂D abhängige Konstante C . Auf dem Rand haben wir

$$u(x) = \int_{\partial D} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial D$$

und

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu}(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} ds(y) \mp \frac{1}{2} \varphi(x), \quad x \in \partial D, \quad (2.13)$$

wobei

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu}(x) := \lim_{h \rightarrow +0} \nu(x) \cdot \text{grad } u(x \pm h\nu(x))$$

im Sinne von gleichmäßiger Konvergenz auf ∂D zu verstehen ist und die Integrale als uneigentliche Integrale existieren.

BEWEIS. Ein Beweis findet sich in [CK98], Theorem 3.1. $\square$

Satz 2.32 Sei ∂D von der Klasse C^2 . Dann ist der Einfachschichtpotentialoperator $S: L^2(\partial D) \rightarrow H^1(\partial D)$

$$(S\varphi)(x) := \int_{\partial D} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial D$$

beschränkt. Wenn wir annehmen, dass ∂D zur Klasse $C^{2,\alpha}$ gehört, dann ist die Normalableitung des Einfachschichtpotentials $K': L^2(\partial D) \rightarrow H^1(\partial D)$

$$(K'\varphi)(x) := \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial D$$

beschränkt.

BEWEIS. Ein Beweis findet sich in [CK98], Theorem 3.6. $\square$

Wir erweitern die Sprungbeziehungen aus Satz 2.31 auf den Fall von L^2 -Dichten.

Satz 2.33 Sei $\varphi \in L^2(\partial D)$. Dann gelten für das Einfachschichtpotential u mit Dichte φ für $x \in \partial D$ die Sprungbeziehungen

$$\lim_{h \rightarrow +0} \int_{\partial D} |u(x \pm h\nu(x)) - (S\varphi)(x)|^2 ds(x) = 0$$

und

$$\lim_{h \rightarrow +0} \int_{\partial D} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu}(x \pm h\nu(x)) - (K'\varphi)(x) \pm \frac{1}{2}\varphi(x) \right|^2 ds(x) = 0. \quad (2.14)$$

BEWEIS. Die Beweise finden sich in [Ker80], Kapitel 3.⁵ $\square$

Analog zum Oberflächenpotential führen wir das Volumenpotential ein.

⁵Die entsprechenden Aussagen werden in den Gleichungen (2.1) und (3.1) getätigt.

Satz 2.34 *Das Volumenpotential*

$$V(x) := \int_D \Phi(x, y) \varphi(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^3$$

mit Dichte $\varphi \in L^2(D)$ ist stetig in $\mathbb{R}^3$ und analytisch in D_e . Es gilt im schwachen Sinne

$$\Delta V = 0 \quad \text{in } D_e$$

und

$$\Delta V = -\varphi \quad \text{in } D.$$

BEWEIS. Ein Beweis findet sich in [CK98], Theoreme 8.1 und 8.2. $\square$

Satz 2.35 *Seien D und G zwei beschränkte Gebiete. Dann definiert das Volumenpotential*

$$(V\varphi)(x) := \int_D \Phi(x, y) \varphi(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^3$$

einen beschränkten linearen Operator $V: L^2(D) \rightarrow H^2(G)$.

BEWEIS. Ein Beweis findet sich in [CK98], Theorem 8.2, wo der allgemeinere Fall der Helmholtz-Gleichung betrachtet wird. $\square$

Für einen Eindeutigkeitsbeweis in Abschnitt 5.3 benötigen wir die Sprungbeziehung der Rotation eines Vektorpotentials.

Satz 2.36 (Sprungbeziehungen für Vektorpotentiale) *Sei ∂D von der Klasse C^2 und sei a ein stetiges Tangentialfeld. Dann ist das Vektorpotential A mit Dichte a stetig in $\mathbb{R}^3$. Auf dem Rand haben wir*

$$A(x) = \int_{\partial D} a(y) \Phi(x, y) ds(y),$$

und

$$\nu(x) \times \operatorname{curl} A_{\pm}(x) = \int_{\partial D} \nu(x) \times \operatorname{curl}_x \{a(y) \Phi(x, y)\} ds(y) \pm \frac{1}{2} a(x)$$

für $x \in \partial D$, wobei

$$\nu(x) \times \operatorname{curl} A_{\pm}(x) := \lim_{h \rightarrow +0} \nu(x) \times \operatorname{curl} A(x \pm h\nu(x))$$

im Sinne von gleichmäßiger Konvergenz auf ∂D zu verstehen ist und die Integrale als uneigentliche Integrale existieren.

BEWEIS. Ein Beweis findet sich in [CK98], Theorem 6.11. $\square$

2.5 Vektoranalysis

Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass sich jedes Vektorfeld aus $L^2(D)^3$ als Summe aus einem divergenzfreien Feld und einem Gradientenfeld darstellen lässt. Dies führt zu einer Dekomposition von $L^2(D)^3$ in eine direkte Summe orthogonaler Räume. Zusätzlich zitieren wir die Integralsätze von Green und Gauß.

Satz 2.37 (Helmholtz-Zerlegung) *Zu jedem Vektorfeld $A \in L^2(D)^3$ existieren eine Funktion $q \in H^1(D)$ und ein Vektorfeld $v \in H^1(D)^3$, so dass*

$$A = \text{grad } q + \text{curl } v,$$

wobei

$$\text{curl } v \in \left\{ u \in \overline{C_0^\infty(D)}^{H_{\text{div}}(D)} : \text{div } u = 0 \right\}$$

und $\text{div } v = 0$ gelten und q die einzige Lösung von

$$\int_{\Omega} (\text{grad } q - v) \cdot \text{grad } \varphi \, dx = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in H^1(D)$$

ist. Darüber hinaus sind $\text{grad } q$ und $\text{curl } v$ orthogonal zueinander.

BEWEIS. Wir verweisen auf Chapter I, §3, Corollary 3.4 in [GR86]. $\square$

Aus Satz 2.37 können wir mit Hilfe der Rechenregeln für curl , grad und div folgern, dass sich jedes Vektorfeld $A \in L^2(D)^3$ als Superposition eines divergenzfreien und eines rotationsfreien Vektorfelds darstellen lässt.

Korollar 2.38 *Ein divergenzfreies Vektorfeld $A \in L^2(D)^3$ kann als Rotation eines Vektorpotentials dargestellt werden. Ein rotationsfreies Vektorfeld kann als Gradient eines Skalarpotentials dargestellt werden.*

Satz 2.39 (Satz von Gauß) *Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand und sei $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit kompaktem Träger.*

Dann gilt

$$\int_D \operatorname{div} A \, dx = \int_{\partial D} \nu \cdot A \, ds.$$

BEWEIS. Ein Beweis findet sich in [McL00], Theorem 3.34. $\square$

Der Satz von Gauß kann auch auf Vektorfelder $A \in H_{\operatorname{div}}(D)$ erweitert werden. Da $C^\infty(\overline{D})^3$ dicht in $H_{\operatorname{div}}(D)$ ist, existiert zu $A \in H_{\operatorname{div}}(D)$ eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(\overline{D})^3$ mit $A_n \rightarrow A$ für $n \rightarrow \infty$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_D \operatorname{div} A \, dx &= \int_D \operatorname{div} \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D \operatorname{div} A_n \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial D} \nu \cdot A_n \, ds \\ &= \int_{\partial D} \lim_{n \rightarrow \infty} \nu \cdot A_n \, ds = \int_{\partial D} \nu \cdot A \, ds, \end{aligned}$$

wobei die Randwerte für $A \in H_{\operatorname{div}}(D)$ im Sinne des Spuoperators zu verstehen sind.

Satz 2.40 (Satz von Stokes) Seien $D \subset \mathbb{R}^3$ offen, A ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf D und $\Gamma \subset D$ eine Fläche mit Lipschitz-stetigem Rand $\partial\Gamma$. Dann gilt

$$\int_\Gamma \nu \cdot \operatorname{curl} A \, dx = \int_{\partial\Gamma} \tau \cdot A \, ds,$$

wobei wir mit τ das Einheitstangentialfeld an Γ bezeichnen.

BEWEIS. Ein Beweis findet sich in [Heu04], Satz 209.1. $\square$

Der Satz von Stokes kann in ähnlicher Weise wie der Satz von Gauß auf Vektorfelder $u \in H_{\operatorname{curl}}(D)$ erweitert werden.

2.6 Die Maxwell-Gleichungen

Die Erzeugung von elektrischen und magnetischen Feldern und deren Wechselwirkung bei zeitabhängigen Feldern werden durch die vier Maxwell-Gleichungen beschrieben. In den Jahren 1861 bis 1864 fasste James Clerk Maxwell (1831-1879) drei damals bekannte Gesetzmäßigkeiten (Ampère'sches Gesetz, Induktionsgesetz von Faraday und Gauß'sches Gesetz) zusammen

und ergänzte sie durch den Maxwell'schen Verschiebungsstrom zu einer konsistenten Theorie. Diese vier Gleichungen in ihrer differenziellen Form

$$\begin{aligned}\operatorname{div} D &= \rho \\ \operatorname{curl} E + \frac{\partial B}{\partial t} &= 0 \\ \operatorname{div} B &= 0 \\ \operatorname{curl} H &= j_l + \frac{\partial D}{\partial t}\end{aligned}$$

bilden die Grundlage der Elektrodynamik und der theoretischen Elektrotechnik. Hierbei bezeichnet D die elektrische Flussdichte, B die magnetische Flussdichte, E das elektrische Feld, H die magnetische Feldstärke, ρ die Ladungsdichte und j_l die Leistungsstromdichte. Die zeitliche Änderung von D wird auch als Verschiebungsstromdichte $j_v := \frac{\partial D}{\partial t}$ bezeichnet. Die totale Stromdichte j ergibt sich dann durch $j := j_l + j_v$.

Im Fall der Brennstoffzellenanwendung nehmen wir einen stationären Zustand an, die Ströme sind also zeitlich konstant. Daher vereinfachen sich die Maxwell-Gleichungen zu den elektro- und magnetostatischen Gleichungen

$$\operatorname{div} D = \rho \quad (2.15)$$

$$\operatorname{curl} E = 0 \quad (2.16)$$

$$\operatorname{div} B = 0 \quad (2.17)$$

$$\operatorname{curl} H = j. \quad (2.18)$$

Sie werden durch das Ohm'sche Gesetz

$$j = \sigma E \quad (2.19)$$

und die Materialgleichungen

$$D = \epsilon_0 \epsilon_r E$$

und

$$B = \mu_0 \mu_r H \quad (2.20)$$

vervollständigt.

Die Leitfähigkeitsverteilung σ ist im Allgemeinen in anisotropen Materialien ein Tensor zweiter Stufe, in isotropen Materialien kann er durch ein Skalar ersetzt werden. ϵ_0 bezeichnet die Permittivität des Vakuums, also die Durchlässigkeit für elektrische Felder. Die relative Permittivität ϵ_r ist eine materialabhängige, dimensionslose Größe. Die magnetische Feldkonstante $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$ gibt die magnetische Permeabilität des Vakuums an. Die dimensionslose Permeabilitätszahl μ_r bezeichnet das Verhältnis der Permeabilität eines Stoffes zur Permeabilität des Vakuums, anhand derer sich magnetische Materialien wie folgt klassifizieren lassen:

- *Diamagnetische Stoffe* mit $0 \leq \mu_r < 1$ haben das Bestreben, das Magnetfeld aus ihrem Inneren zu verdrängen und magnetisieren sich somit gegen die Richtung des externen Magnetfelds.
- *Paramagnetische Stoffe* mit $\mu_r > 1$ magnetisieren sich so, dass sie das externe Magnetfeld in ihrem Inneren verstärken.
- *Ferromagnetische Stoffe* mit $\mu_r \gg 1$ werden selbst zum Magneten, nachdem sie einem externen Magnetfeld ausgesetzt worden sind.

Abbildung 2.1 zeigt eine Einordnung der unterschiedlichen Materialeigenschaften und die Auswirkungen auf das Magnetfeld H und die magnetische Flussdichte B . Es ergibt sich mit der materielleigenen Magnetisierung M der Zusammenhang

$$B = \mu_0(H + M).$$

Die Gleichungen (2.15)–(2.18) werden üblicherweise in ein elliptisches Randwertproblem überführt (siehe [PK03]). Dazu nehmen wir an, dass $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist. Wegen $\text{curl } E = 0$ existiert nach Korollar 2.38 ein elektrisches Potential φ_E mit

$$E = \text{grad } \varphi_E.$$

Für die Stromdichte j erhalten wir also aus (2.19) die Gleichung

$$j = \sigma \text{ grad } \varphi_E.$$

Wir verwenden die Identität

$$\text{div curl } A = 0,$$

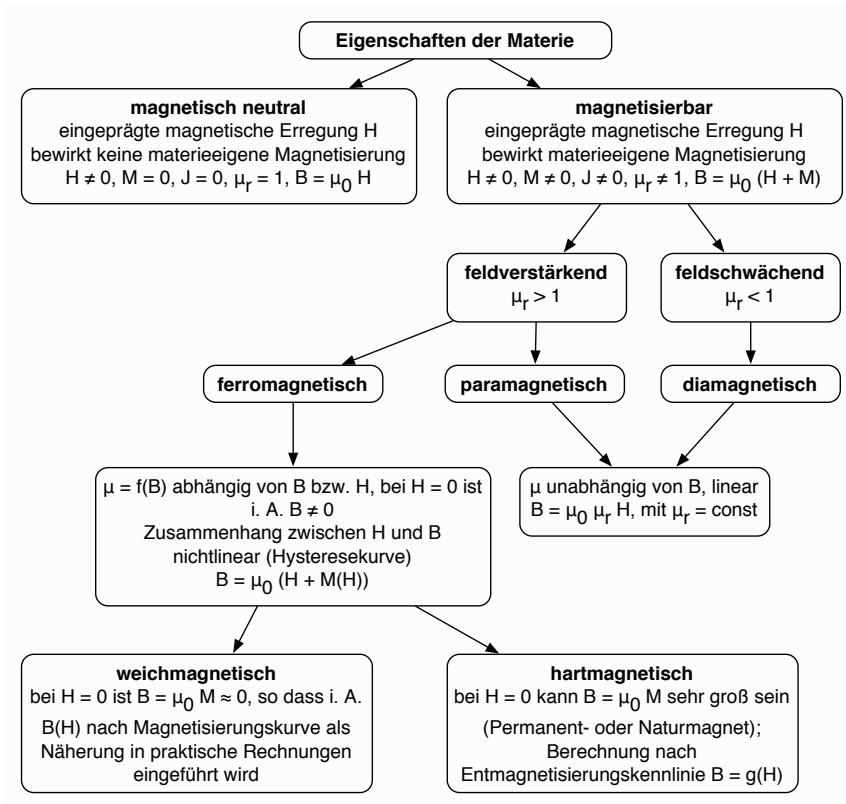


Abbildung 2.1: Einteilung der Materie in Gruppen mit charakteristischen Magnetisierungseigenschaften; nach: [Fro94], Abbildung 5.39

die für jedes beliebige hinreichend glatte Vektorfeld A gültig ist, und erhalten aus (2.18) die Gleichung

$$\operatorname{div} j = \operatorname{div} \operatorname{curl} H = 0, \quad (2.21)$$

die Stromverteilung j ist also *divergenzfrei*. Jetzt erhalten wir die Gleichung

$$\operatorname{div} \sigma \operatorname{grad} \varphi_E = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2.22)$$

für das elektrische Potential φ_E . Zusätzlich haben wir die Randbedingung

$$v \cdot j = v \cdot \sigma \operatorname{grad} \varphi_E =: g. \quad (2.23)$$

Das elektrische Potential φ_E ist nur bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt, also fügen wir die Normalisierungsbedingung

$$\int_{\partial\Omega} \varphi_E \, dy = 0 \quad (2.24)$$

hinzu, um Eindeutigkeit für dieses Neumann-Problem sicherzustellen.

Aus dem Gauß'schen Integralsatz (Satz 2.39) und der Divergenzfreiheit der Ströme (2.21) erhalten wir die Zulässigkeitsbedingung

$$\int_{\partial\Omega} g(y) \, ds(y) = \int_{\partial\Omega} v(y) \cdot j(y) \, ds(y) = \int_{\Omega} \operatorname{div} j(y) \, dy = 0.$$

Die Lösbarkeit dieses anisotropen Randwertproblems wurde in [PK03] untersucht. Die Autoren zeigen dort die Lösbarkeit dieses Problems in seiner schwachen Form

$$\int_{\Omega} \operatorname{grad} \psi \cdot \sigma \operatorname{grad} \varphi_E \, dy = \int_{\partial\Omega} \psi \, \nu \cdot \sigma \operatorname{grad} \varphi_E \, ds$$

für alle $\psi \in H^1(\Omega)$. Wir fassen die Resultate in folgendem Satz zusammen.

Satz 2.41 (Eindeutigkeit und Existenz für das anisotrope Randwertproblem)
Falls die Leitfähigkeitsmatrix σ in Ω koerzitiv ist, also eine Konstante $c > 0$ existiert, so dass

$$\Re \left(a \cdot \overline{\sigma(y)a} \right) \geq c|a|^2, \quad a \in \mathbb{R}^3, \quad y \in \Omega,$$

dann hat das Randwertproblem, das durch (2.22), (2.23) und (2.24) gegeben ist, eine eindeutige schwache Lösung $\varphi_E \in H^1(\Omega)$ für alle zulässigen Randwerte g und diese Lösung hängt stetig von den Randwerten $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ ab.

BEWEIS. Ein Beweis findet sich in [PK03], Theorem 1. □

Die Leitfähigkeit σ ist hier als effektive Leitfähigkeit aufzufassen, unter der wir Thermodynamik, Strömungsdynamik und Reaktionskinetik zusammenfassen. Wir betrachten also ein makroskopisches Modell zur Simulation der Brennstoffzelle. Die Simulation der physikalischen und chemischen Vorgänge in Brennstoffzellen ist ein eigenes vollständiges Forschungsgebiet.

2.7 Das Biot-Savart-Gesetz

In diesem Abschnitt leiten wir aus den stationären Maxwell-Gleichungen (2.15)–(2.18) das Biot-Savart-Gesetz her, das den Zusammenhang zwischen der Stromverteilung in einem Gebiet und dem von ihr erzeugten Magnetfeld abbildet. Das Gesetz ist nach den beiden französischen Mathematikern Jean-Baptist Biot und Félix Savart benannt, die im frühen 19. Jahrhundert den Zusammenhang zwischen elektrischem Strom und Magnetismus untersuchten.

Wegen (2.17) und Korollar 2.38 kann die magnetische Flussdichte B durch ein Vektorpotential A mit

$$B = \operatorname{curl} A \quad (2.25)$$

dargestellt werden. Da für jedes hinreichend glatte Vektorfeld A die Bedingung $\operatorname{curl} \operatorname{grad} A = 0$ erfüllt ist, ist A nur bis auf ein Gradientenfeld festgelegt. Nach [Leh90] ist es für statische Probleme sinnvoll, für A die so genannte *Coulomb-Eichung*

$$\operatorname{div} A = 0 \quad (2.26)$$

zu fordern. Aus

$$\operatorname{curl} \operatorname{curl} A = \operatorname{grad} \operatorname{div} A - \Delta A$$

folgt dann mit (2.26) und (2.20) aus (2.18) die Poisson-Gleichung

$$\Delta A = -\mu_0 j \quad (2.27)$$

für das Vektorpotential A , die durch

$$A(x) := \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{j(y)}{|x-y|} dy, \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (2.28)$$

gelöst wird. Die Anwendung des Laplace-Operators Δ auf ein Vektorfeld geschieht hier komponentenweise.

An dieser Stelle sei noch einmal darauf hingewiesen, dass in (2.27) die Voraussetzung $\operatorname{div} A = 0$ benutzt wurde, die unser Ansatz für nicht divergenzfreie Ströme nicht zwingend erfüllt.

Aus (2.25) und (2.28) ergibt sich nun für die magnetische Flussdichte B das *Biot-Savart-Gesetz*

$$B(x) = \operatorname{curl} \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{j(y)}{|x-y|} dy \right\} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{j(y) \times (x-y)}{|x-y|^3} dy.$$

Obwohl dieses Gesetz schon lange bekannt ist, ist es immer noch Gegenstand aktueller Forschung (siehe zum Beispiel [CG03]). Aus diesem physikalischen Gesetz definieren wir nun unter Berücksichtigung von (2.20) einen Integraloperator, der die Stromverteilung j in Ω auf das Magnetfeld H auf einer Messoberfläche ∂G abbildet.

Definition 2.42 (Biot-Savart-Operator) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand und $j \in L^2(\Omega)^3$. Durch

$$(Wj)(x) := \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{j(y) \times (x-y)}{|x-y|^3} dy, \quad x \in \Omega_e \quad (2.29)$$

wird der *Biot-Savart-Operator* definiert, der eine Stromverteilung auf das von ihr erzeugte Magnetfeld abbildet.

Bei der Herleitung des Gesetzes von Biot-Savart aus den Maxwell-Gleichungen haben wir explizit verwendet, dass die Stromverteilung j divergenzfrei ist. Definition 2.42 ist allerdings unabhängig von den physikalischen Gegebenheiten und definiert W allgemein als Integraloperator.

Der Operator W mit Dichte $j \in L^2(\Omega)^3$ kann wegen

$$\begin{aligned} (Wj)(x) &= \int_{\Omega} \operatorname{grad}_x \Phi(x, y) \times j(y) dy \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{curl}_x \{ \Phi(x, y) j(y) \} dy \\ &= \operatorname{curl}(Vj)(x) \end{aligned}$$

auch als Rotation eines vektorwertigen Volumenpotentials

$$(Vj)(x) := \int_{\Omega} \Phi(x, y) j(y) dy$$

geschrieben werden.

Da V in Ω_e harmonisch ist, gilt nach [Kre99], Gleichung (6.16) für $\|x\| \rightarrow \infty$

$$\operatorname{curl} V(x) = O\left(\frac{1}{\|x\|^2}\right) \quad (2.30)$$

gleichmäßig für alle Richtungen.

Satz 2.43 *Alle Komponenten des Magnetfelds H erfüllen in Ω_e die Laplace-Gleichung.*

BEWEIS. Für den Fall einer divergenzfreien Stromverteilung j gilt mit $H := Wj$ wegen $\operatorname{curl} H = 0$ in Ω_e und $\operatorname{div} H = 0$

$$\Delta H = \operatorname{grad} \operatorname{div} H - \operatorname{curl} \operatorname{curl} H = 0.$$

Da H ein Rotationsfeld ist, gilt für eine nicht divergenzfreie Stromverteilung zwar ebenfalls $\operatorname{div} H = 0$, im Allgemeinen ist aber $\operatorname{curl} H \neq 0$. Die Aussage folgt für diesen Fall nach Satz 2.34 durch direktes Anwenden des Laplace-Operators auf die Darstellung als Rotation eines Vektorpotentials. $\square$

Wir klären noch die Abbildungseigenschaften von W . Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand und $\overline{\Omega} \subset G$. Dann bildet der Biot-Savart-Operator W stetig von $L^2(\Omega)^3$ nach $H^1(G)^3$ ab. Dies kann wie folgt gezeigt werden: Da das skalare Volumenpotential nach Satz 2.35 von $L^2(\Omega)$ nach $H^2(G)$ abbildet, bildet das vektorwertige Volumenpotential V von $L^2(\Omega)^3$ nach $H^2(G)^3$ ab. Also gilt $\operatorname{curl} Vj \in H^1(G)^3$.

Im Folgenden fassen wir die Resultate über die Charakterisierung des Nullraums von W aus [Küh05] und [HKP05] zusammen.

Die Magnetotomographie ist generell hochgradig nicht-eindeutig. Es existiert eine Vielzahl von Stromverteilungen j in einem Gebiet Ω , die ein identisches Magnetfeld H im offenen Außenraum Ω_e erzeugen. In [KKP02] zeigen die Autoren durch Anwendung des zweiten Green'schen Satzes, dass der Nullraum $N(W)$ von W die Menge

$$M := \left\{ j = \Delta m : m \in C_0^2(\Omega) \right\}$$

enthält.

In [HKP05] zeigen die Autoren, dass der Nullraum $N(W)$ von W durch die Menge

$$N(W) = \left\{ \operatorname{curl} v : v \in H_0^1(\Omega)^3, \operatorname{div} v = 0 \right\}$$

charakterisiert wird. Dadurch erhalten wir aus jeder Funktion $v \in H_0^1(\Omega)^3$, für die $\operatorname{div} v = 0$ gilt, ein Element $w := \operatorname{curl} v$ aus dem Nullraum $N(W)$ von W . $N(W)$ wird mit dem vektoriellen L^2 -Skalarprodukt zu einem Hilbert-Raum. Darüber hinaus wird gezeigt, dass das orthogonale Komplement $N(W)^\perp$ durch

$$\begin{aligned} N(W)^\perp &:= \left\{ j \in H_{\operatorname{div}=0}(\Omega)^3 : \langle j, j_0 \rangle_{L^2(\Omega)^3} = 0 \ \forall j_0 \in N(W) \right\} \\ &= \left\{ j \in H_{\operatorname{div}=0}(\Omega)^3 : \exists q \in L^2(\Omega) \text{ so, dass } \operatorname{grad} q = \operatorname{curl} j \right\} \end{aligned}$$

gegeben ist.

Für spezielle Situationen gilt allerdings Eindeutigkeit für die Stromrekonstruktion. Zum Beispiel wird für den Fall, dass die Ströme in einem Drahtgitternetzwerk fließen, die eindeutige Rekonstruierbarkeit in [HKP05] gezeigt. Erfüllen die Ströme gewisse Richtungsbedingungen, kann ebenfalls Eindeutigkeit gezeigt werden (siehe [KKP02]). Da in der Praxis Differenzmessungen vorliegen, kann diese Bedingung nicht verwendet werden. Die Differenz zweier Stromverteilungen erfüllt im Allgemeinen keine Richtungsbedingung, selbst wenn beide Stromverteilungen sie einzeln erfüllen.

Das gemessene Magnetfeld ist auf einer Oberfläche ∂G mit $\overline{\Omega} \subset G$ gegeben. Die offensichtliche Fragestellung ist, wie viele Daten notwendig sind, um das Magnetfeld eindeutig in $\Omega_e := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ zu bestimmen. Wir fassen die Ergebnisse aus [Küh05], Section 2.4 wie folgt zusammen: Das Magnetfeld H ist in G_e eindeutig bestimmt, wenn

- alle drei Komponenten von H auf ∂G gegeben sind,
- die Normalenrichtung $\nu \cdot H$ auf ∂G und der Stromfluss $\nu \cdot j|_{\partial\Omega}$ gegeben sind oder
- die Tangentialrichtung $\nu \times H$ auf ∂G gegeben ist.

Die erste Möglichkeit verwendet überbestimmte Daten, was die Messung aufwändiger gestaltet, dafür aber weniger fehleranfällig ist. Die zweite Möglichkeit bietet einen einfachen Weg, das Magnetfeld eindeutig zu bestimmen. Die Einschränkung, dass $\nu \cdot j$ auf $\partial\Omega$ bekannt sein muss, ist in der Praxis nicht relevant, da Stromein- und Stromauslass an zwei festen Punkten der Brennstoffzelle angebracht sind und so bei Differenzmessungen mit gleichem Gesamtstrom $\nu \cdot j = 0$ gilt.

2.8 Messapparatur und Messverfahren

Die Messung des Magnetfelds erfolgt mit dem in Abbildung 2.2 gezeigten Tomographen. Dazu sind auf dem Verfahrtsch zwei magnetoresistive Sensoren befestigt, von denen der untere in zwei und der obere in drei Raumrichtungen bewegt werden kann. Die Sensoren messen alle drei Komponenten des Magnetfelds.

Das Messprinzip magnetoresistiver Sensoren basiert auf dem Effekt, dass sich der Widerstand einer stromdurchflossenen anisotropen ferromagnetischen Schicht unter dem Einfluss eines äußeren Magnetfelds ändert, wobei diese Änderung von Richtung und Stärke des Magnetfelds abhängig ist. Dabei ist der Widerstand minimal, wenn das äußere Magnetfeld senkrecht zur Stromrichtung ist und maximal, wenn Feldlinien und Stromrichtung parallel zueinander sind.

Auf der Brücke wird dann das Messobjekt befestigt und kann nun – falls zugänglich – durch den oberen Sensor von fünf Seiten vermessen werden. Die Vermessung der Unterseite erfolgt dann durch den unteren Sensor. Üblicherweise liefert das Gerät also die Messdaten an fünf Seiten auf der Oberfläche ∂G eines Quaders G um das Messobjekt. Eine Seite ist dabei nicht zugänglich, da an ihr die Brennstoffzuführung montiert ist.

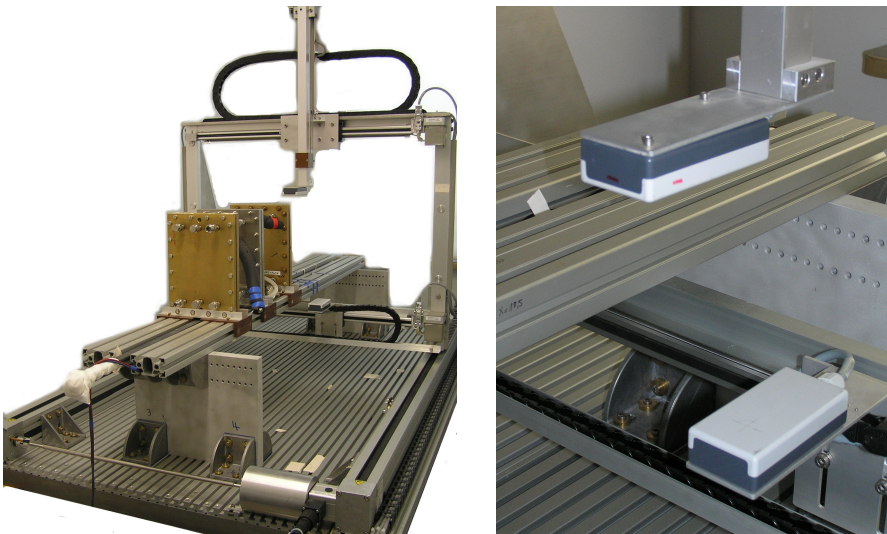


Abbildung 2.2: Magnetotomograph (links) und Detailansicht der Sensoren (rechts)

In den Sensorgehäusen befinden sich auf einer Platine neben dem eigentlichen Sensorchip auch eine Verstärkerschaltung und ein Tiefpass, um Signale von hochfrequenten Störungen über 2 kHz herauszufiltern. Die Sensoren messen die magnetische Flussdichte B in drei Raumrichtungen. Ihr Messbereich liegt zwischen $-600 \mu\text{T}$ und $600 \mu\text{T}$, wobei das magnetische Feld H und die magnetische Flussdichte B durch die Materialgleichung (2.20) miteinander verknüpft sind.

Bei der Verwendung solcher Sensoren können unter anderem folgende stochastische und systematische Fehler auftreten:

Allgemeine Fehler: Stochastische Fehler wie Sensorrauschen und intrinsische oder extrinsische Störungen

Offsetfehler: Addition desselben konstanten Fehlervektors an jedem Messpunkt, da die Magnetfeldsensoren auch ohne anregendes Magnetfeld ein Spannungssignal liefern

Verkippsfehler: Auf einer Sensorplatine sind drei einachsige Sensoren platziert, die Abweichungen von der Orthogonalität aufweisen

Positionsoffsetfehler: Die Position der Messpunkte relativ zum Messobjekt wird nicht genau genug bestimmt

Linearitätsfehler: Wie in [Tho06] beschrieben, ist der Zusammenhang zwischen Magnetfeldstärke und Ausgangsspannung der Sensoren nur näherungsweise linear

Cross-Axis-Effekt: Magnetsensoren haben die Eigenschaft, auch sensitiv auf orthogonale Felder zu reagieren; in [KVR06] beschreiben die Autoren diesen Effekt und beziffern die Abweichung bei der Verwendung von Magnetsensoren als Kompass auf bis zu $\pm 2,4^\circ$

In [Tho06] wird der Aufbau des Tomographen detailliert erläutert und Tabelle 2.1 fasst die wichtigsten Spezifikationen zusammen.

Der Verfahrtschiff wurde so konstruiert, dass an den meisten Stellen auf ferromagnetische Materialien verzichtet wurde. Statt dessen wurde Aluminium mit einer relativen Permeabilität $\mu_r = 1 + 2,08 \cdot 10^{-5}$ (siehe [CH08]) als leicht paramagnetischer Werkstoff verwendet, um das Magnetfeld so wenig wie möglich zu verfälschen und gleichzeitig die mechanische Stabilität des Verfahrtschiffes sicherzustellen. In den Schrittmotoren zur Positionierung der Sensorköpfe werden bauartbedingt rotierende Permanentmagneten verwendet, die von

Tabelle 2.1: Spezifikationen des Tomographen

Größe des Verfahrtes	1100 mm × 2100 mm
Verfahrraum (oberer Sensor)	550 mm × 336 mm × 1055 mm
Verfahrfläche (unterer Sensor)	666 mm × 1055 mm
maximale Verfahrgeschwindigkeit	100 mm/s
Positioniergenauigkeit	18,8 μm (x_1 - und x_2 -Achse), 26,3 μm (x_3 -Achse)
minimaler Abstand von Sensor und Messobjekt	≈ 5 mm (oberer Sensor), ≈ 60 mm (unterer Sensor)
Messbereich der Sensoren	$-600 \mu\text{T} \dots 600 \mu\text{T}$
maximale Abtastrate	100 Hz
Sensorauflösung	12 nT
Sensorrauschen	10 nV / $\sqrt{\text{Hz}}$ (bei 5 Hz)

ortsfesten Spulen umgeben sind. Die dadurch entstehenden Störsignale werden durch eine Abschirmung gedämpft.

Eine weitere Störquelle ist das Erdmagnetfeld. Abbildung 2.3 zeigt dabei exemplarisch den Verlauf der x_3 -Komponente des Erdmagnetfelds in Braunschweig über 24 Stunden und in der Detailansicht einen etwa einstündigen Bereich mit besonders großer Schwankung. Wir beobachten, dass die maximale Schwankung des Messsignals mit < 20 nT in der Größenordnung der Messgenauigkeit des im Tomographen verwendeten Sensors (12 nT) liegt und daher das Magnetfeld über den Zeitraum einer Messung (< 15 min) als stationär angenommen werden kann.

Das gemessene Gesamtmagnetfeld ist dabei die Summe aus Erdmagnetfeld, Umgebungsfeld, dem Feld, das durch den Strom in den Zuleitungen erzeugt wird und dem eigentlichen durch die Ströme in der Brennstoffzelle erzeugten Feld. Um das Erdmagnetfeld und andere stationäre Störfelder zu eliminieren, wird eine Differenzmessung vorgenommen. Dabei werden in kurzem zeitlichen Abstand voneinander zwei Messungen in unterschiedlichen Betriebszuständen der Brennstoffzelle durchgeführt und diese dann voneinander subtrahiert. Die aus diesem Differenzfeld rekonstruierte Stromdichte ist dann eine Differenzstromdichte, die die Differenz zweier stationärer Betriebszustände der Brennstoffzelle darstellt. Es ist zu beachten, dass die von den Strömen in der Brennstoffzelle erzeugten Magnetfelder in der Größenordnung des Erdmagnetfelds liegen. Beispielsweise hat das von einem mit 60 A durchflos-

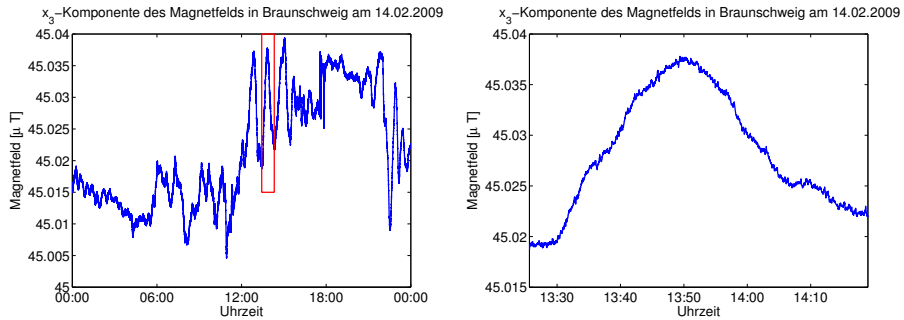


Abbildung 2.3: Exemplarischer Verlauf der x_3 -Komponente des Erdmagnetfelds über 24 Stunden (links) und in der Ausschnittsvergrößerung von 60 Minuten (rechts).
Datenquelle: Institut für Geophysik und extraterrestrische Physik der TU Braunschweig

senen unendlich langen Leiter erzeugte Magnetfeld im Abstand von 0,2 m einen Betrag von $60 \mu\text{T}$.

Für die Vermessung im Magnetotomographen muss der Aufbau der Brennstoffzelle modifiziert werden. Üblicherweise werden die Endplatten aus Stahl gefertigt, da sie chemisch, mechanisch und thermisch stabil und je nach Konstruktion auch elektrisch leitfähig sein müssen. Der herkömmlich verwendete Stahl muss daher durch nicht magnetisierbaren Stahl (so genannten U-Boot-Stahl) ersetzt werden. Auch bei den Zugankern zum Verspannen der Platten muss auf Materialien wie Messing zurückgegriffen werden. An dieser Stelle sind auch Konstruktionen mit Bändern aus Glas- oder Carbonfaser denkbar. Die restlichen üblicherweise verbauten Materialien sind durch eine magnetische Permeabilität $\mu_r \approx 1$ unkritisch. Daher gilt im hier betrachteten Fall näherungsweise $B = \mu_0 H$.

3

Klassische Algorithmen zur Magnetotomographie

Wir entwickeln in diesem Kapitel drei auf der Tikhonov-Regularisierung basierende Rekonstruktionsmethoden, die unterschiedliches a-priori-Wissen über die zu rekonstruierende Stromverteilung beinhalten und deren numerische Stabilität wir im folgenden Kapitel 4 analysieren werden. Im Einzelnen untersuchen wir

- (A) eine *gewöhnliche Tikhonov-Regularisierung* zur approximativen Lösung der Biot-Savart-Integralgleichung

$$Wj = H$$

ohne Einbeziehung von Vorwissen,

- (B) eine *divergenzfreie Tikhonov-Regularisierung*, die zusätzlich zu (A) die Eigenschaft

$$\operatorname{div} j = 0$$

verwendet und

- (C) eine *Projektionsmethode*, die eine Basis aus Lösungen des vollen Randwertproblems (2.21)–(2.24) verwendet.

In Abschnitt 3.1 führen wir den mit *finiten Integration* diskretisierten Biot-Savart-Operator ein und beschreiben das verwendete Gittermodell. Die Abschnitte 3.2, 3.3 und 3.4 dienen dazu, die genannten Algorithmen zu entwickeln und darzustellen.

In diesem und im folgenden Kapitel modellieren wir die Brennstoffzelle als Quader Ω , der parallel zu den Koordinatenachsen angeordnet ist. Ω ist

durch

$$\Omega := \left\{ y \in \mathbb{R}^3, -a < y_1 < a, -b < y_2 < b, c_1 < y_3 < c_2 \quad \text{mit } a, b, c_1, c_2 > 0 \right\}$$

gegeben, wobei wir die Notation so gewählt haben, um Konsistenz mit den Bezeichnungen in Kapitel 5 zu erreichen. Wir nehmen an, dass wir alle drei Magnetfeldkomponenten auf einer Oberfläche ∂G mit $\overline{\Omega} \subset G$ gegeben haben. In allen numerischen Berechnungen in Kapitel 4 haben wir ∂G ebenfalls als Quader angenommen, da dies auch der Messpunktanordnung bei realen Messungen entspricht. Der in Abschnitt 2.8 beschriebene Tomograph ist prinzipiell in der Lage, beliebige Messpunkte anzusteuern, was aber einen erhöhten Programmieraufwand darstellt. Abbildung 3.1 verdeutlicht die Anordnung von Ω und den Messpunkten auf ∂G .

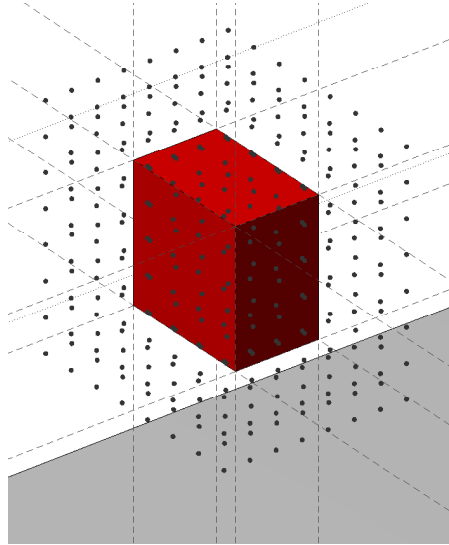


Abbildung 3.1: Anordnung von Ω und Messpunkten auf ∂G

In diesem und im folgenden Kapitel kennzeichnen wir zur besseren Unterscheidung endlichdimensionale Operatoren mit Fettdruck, während unendlichdimensionale Operatoren mager ausgezeichnet werden.

3.1 Stetige und diskrete Realisierung des Biot-Savart-Operators

Wir fassen nun die *finite Integration*, angewandt auf die Magnetotomographie, zusammen. Dieses Verfahren zur näherungsweise Lösung der Maxwell-Gleichungen wurde in [Wei86] als *Finite Integration Theory (FIT)* vorgestellt. Dabei werden die Maxwell-Gleichungen in ihrer Integralform diskretisiert. Die wichtigste Eigenschaft ist nach [Kos94], dass die analytischen Eigenschaften der Lösungen der Maxwell-Gleichungen ein diskretes Analogon haben. Die Konvergenz gegen die Lösung des kontinuierlichen Problems wurde in [PK03] gezeigt.

Zuerst beschreiben wir das Drahtgitter, mit dem wir Ω diskretisieren. Das Gitter ist die Vereinigung mehrerer Quader mit Diskretisierungslevels n_1, n_2, n_3 in x_1 -, x_2 - und x_3 -Richtung. Abbildung 3.2 (links) zeigt ein Beispiel einer $3 \times 4 \times 2$ -Diskretisierung. Dieses Gitter hat ein physikalisches Gegenstück. Es entspricht einem Widerstandsnetzwerk gleicher Größe, auf das die Algorithmen der Magnetotomographie direkt angewendet werden können. Die Kanten im Gitter entsprechen dabei den Drähten beziehungsweise Widerständen im Netzwerk. Abbildung 3.2 (rechts) zeigt die Realisierung eines $5 \times 5 \times 4$ -Widerstandsnetzwerks mit Leitfähigkeiten σ_1 in x_1 - x_2 -Richtung und $\sigma_2 \ll \sigma_1$ in x_3 -Richtung. Diese unterschiedlichen Leitfähigkeiten modellieren die Verhältnisse in einer Brennstoffzelle, in der die Leitfähigkeit durch die Membran (x_3 -Richtung) wesentlich niedriger ist als in den Bipolarplatten (x_1 - x_2 -Richtung).

Die Ströme, die in einem Widerstandsnetzwerk fließen, können mit Hilfe der *Knoten-* und *Maschenregeln* berechnet werden. Diese Regeln sind auch als *Kirchhoff'sche Regeln* bekannt und drücken physikalische Erhaltungssätze aus.

Der Knotenregel liegt das *Prinzip der Erhaltung der elektrischen Ladung* zu Grunde, das besagt, dass an jedem Knotenpunkt eines Gleichstromnetzwerks die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme ist. Mit anderen Worten, die Summe der gerichteten Ströme in jedem Punkt des Netzwerks ist gleich 0, es gibt also keine Quellen oder Senken. Die Knotenregel lässt sich daher als diskrete Version der Divergenzfreiheit auffassen.

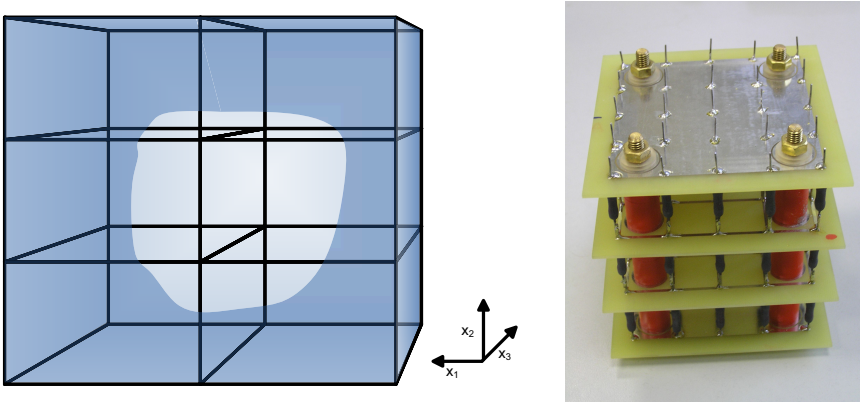


Abbildung 3.2: Software-Realisierung des Drahtgittermodells und physikalische Entsprechung in Form eines Widerstandsnetzwerks

Aus dem *Prinzip der Erhaltung der Energie* lässt sich die *Maschenregel* ableiten: Die gerichtete Summe der elektrischen Potentialdifferenzen entlang jedes geschlossenen Kreises ist gleich 0. Für eine detaillierte Einführung verweisen wir an dieser Stelle auf Standardliteratur der Elektrotechnik, zum Beispiel [Fro94] oder [KK93].

Um ein flexibles geometrisches Setup zu ermöglichen, benutzen wir keine feste Zuordnung zwischen Knoten- und Kantenummerierung. Das Netzwerk enthält $K := n_1 n_2 n_3$ Knoten und $N := 3n_1 n_2 n_3 - n_1 n_2 - n_1 n_3 - n_2 n_3$ Kanten, da die Anzahl der Kanten

- in x_1 -Richtung: $(n_1 - 1)n_2 n_3$
- in x_2 -Richtung: $(n_2 - 1)n_1 n_3$
- in x_3 -Richtung: $(n_3 - 1)n_1 n_2$

beträgt.

Wir nummerieren sowohl Knoten als auch Kanten aufsteigend von 1 bis K beziehungsweise von 1 bis N wie im Folgenden beschrieben und bezeichnen mit $\mathbf{J} := (J_1, \dots, J_N)$ den Vektor der Ströme, die in den diskreten Drähten fließen. Die Knoten werden aufsteigend entlang der x_1 - und x_2 -Achse mit Nummern versehen und diese Vorgehensweise wird für jede Ebene in x_3 -Richtung wiederholt.

Der geordneten Liste der Knoten folgend werden die von den Knoten ausgehenden Kanten aufsteigend in x_1 -, x_2 - und x_3 -Richtung nummeriert, falls eine Kante in dieser Richtung vorhanden ist. Dieses Vorgehen wird für jeden Knoten in der Knotenliste wiederholt. Abbildung 3.3 illustriert diese Vorgehensweise. Ein- und Auslasspunkt des Stroms werden zentriert auf der Unterseite angebracht, im Beispiel in Abbildung 3.3 in Knoten 2 und 14.

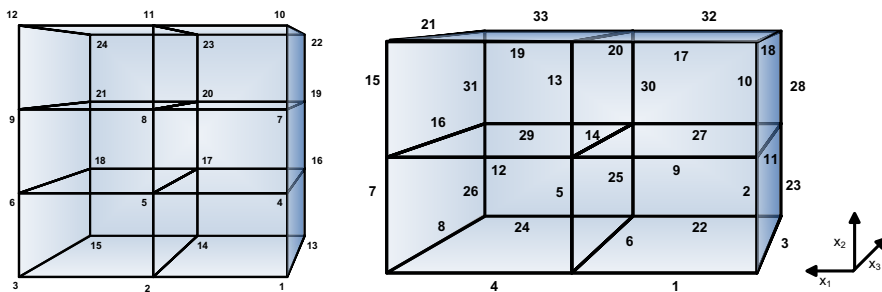


Abbildung 3.3: Knoten- und Kantennummerierung

Um die Ströme zu berechnen, die in dem Drahtgitternetzwerk fließen, stellen wir ein lineares Gleichungssystem auf, das die Knoten- und Maschenregeln repräsentiert. Zur Realisierung der Knotenregeln konstruieren wir eine Adjazenzmatrix

$$\mathbf{T} = (T_{kl})$$

mit K Zeilen und N Spalten, wobei T_{kl} gleich 1 gesetzt wird, falls Draht l im Knoten k beginnt, gleich -1 , falls Draht l im Knoten k endet und 0 sonst. Wenn wir die Gesamtstromstärke im Netzwerk mit I bezeichnen, können wir die rechte Seite $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_K)^T$ durch

$$b_k = \begin{cases} I, & \text{falls } k \text{ der Einlassknoten des Stroms ist} \\ -I, & \text{falls } k \text{ der Auslassknoten des Stroms ist} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.1)$$

ausdrücken, so dass wir die folgenden Gleichungen aus den Knotenregeln erhalten

$$\sum_{l=1}^N T_{kl} I_l = b_k, \quad k = 1, \dots, K. \quad (3.2)$$

Zusätzlich stellen wir das lineare Gleichungssystem auf, das die Maschenregeln repräsentiert. Wir nehmen an, dass der Widerstand des Drahts l durch

R_l gegeben ist. Der Strom J_l , der durch Draht l fließt, der Widerstand R_l und die Spannung U_l zwischen den beiden Endpunkten von Draht l sind durch das *Ohm'sche Gesetz*

$$U_l = R_l \cdot J_l$$

miteinander verknüpft. Die Maschenregel besagt, dass die gerichtete Summe von Potentialdifferenzen entlang jeder Masche 0 sein muss. Wir erhalten also ein Gleichungssystem

$$\sum_{l=1}^N S_{ml}(R_l J_l) = 0, \quad m = 1, \dots, M,$$

wobei $S_{ml} = 1$, falls Draht l Teil von Masche m ist und dieser Draht in positiver Richtung durchlaufen wird und $S_{ml} = -1$, falls er in negativer Richtung durchlaufen wird. Ansonsten ist $S_{ml} = 0$. Abbildung 3.4 illustriert die Knoten- und Maschenregeln für jeweils einen Knoten beziehungsweise eine Masche.

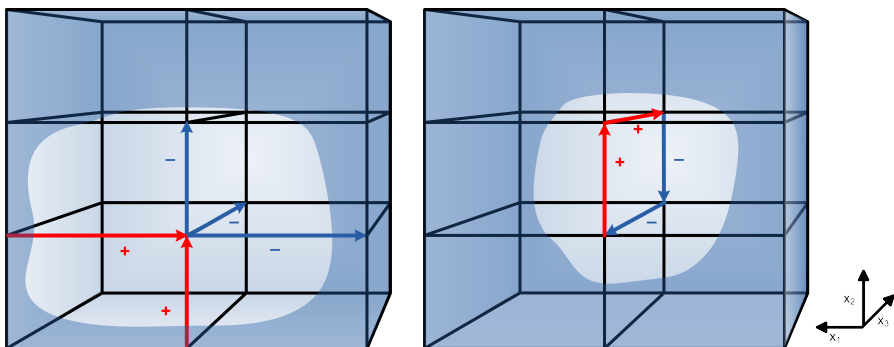


Abbildung 3.4: Beispielhafte Darstellung der Kirchhoff'schen Knoten- und Maschenregel

Derartiges Aufstellen der Knoten- und Maschenregeln resultiert allerdings in einer großen Zahl linear abhängiger Gleichungen, so dass ein systematisches Vorgehen wie die Knoten- oder Maschenanalyse, die in [KK93], [CH08] oder [Pie68] beschrieben wird, erforderlich ist, um die sogenannten Elementarmaschen zu ermitteln und insgesamt N linear unabhängige Gleichungen zu erhalten.

Die mit finiter Integration berechnete Lösung konvergiert gegen die Lösung des kontinuierlichen Problems.

Satz 3.1 *Sei σ eine koerzitive Leitfähigkeitsmatrix. Dann besitzt das aus den Knoten- und Maschenregeln resultierende Gleichungssystem für jede Diskretisie-*

runge (n_1, n_2, n_3) eine eindeutige Lösung. Für $n_i \rightarrow \infty, i = 1, 2, 3$ konvergiert sie linear gegen die kontinuierliche Lösung des Randwertproblems.

BEWEIS. Ein Beweis findet sich in [PK03], Theorem 7. $\square$

Sind die Ströme ermittelt, können wir mit Hilfe des diskreten Biot-Savart-Operators das Magnetfeld an einem Punkt $x \in \Omega_e := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ berechnen. Aus der Definition wäre es prinzipiell möglich, das Magnetfeld auch innerhalb von Ω zu berechnen, wenn x nicht auf einem Draht liegt. Da dies auf der einen Seite physikalisch wenig sinnvoll erscheint und es auf der anderen Seite möglich wäre, durch Gitterverfeinerung genau einen Draht durch diesen Punkt zu legen, definieren wir den Biot-Savart-Operator nur für $x \in \Omega_e$. Für eine Stromverteilung $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^N$ in den Drähten definieren wir

$$(\mathbf{WJ})(x) := \frac{1}{4\pi} \sum_{\text{Drähte } l} \int_l \frac{\tilde{J}_l \times (x - p)}{|x - p|^3} ds(p), \quad x \in \Omega_e. \quad (3.3)$$

Dabei ist $\tilde{J}_l := (J_l, 0, 0)^T$, falls Draht l parallel zur x_1 -Achse verläuft, $\tilde{J}_l := (0, J_l, 0)^T$, falls Draht l parallel zur x_2 -Achse verläuft oder $\tilde{J}_l := (0, 0, J_l)^T$, falls Draht l parallel zur x_3 -Achse verläuft. Nach [HKP05] ergibt sich das Magnetfeld eines geraden Leiters, der durch die Punkte

$$p_1 := \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad p_2 := \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $a > 0$ verläuft und durch den ein Strom I_0 fließt, am Punkt $x := (0, 0, h)^T$ mit $h > 0$ durch

$$H(x) = \frac{I_0}{4\pi h} \frac{2a}{\sqrt{a^2 + h^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Diese explizite Darstellung lässt sich auf den Fall erweitern, wenn das Magnetfeld am Punkt $x := (x_1, 0, h)^T$ mit $x_1 \in \mathbb{R}$ ausgewertet wird, wobei die Rechnungen nicht auf kartesische Koordinaten beschränkt sind. Wir verwenden

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x_1 - y)^2 + h^2}^3} dy = \frac{y - x_1}{h^2 \sqrt{(x_1 - y)^2 + h^2}}$$

und berechnen

$$\begin{aligned}
 H(x) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{l_0} \frac{x-y}{|x-y|^3} \times j(y) dl(y) \\
 &= -\frac{hI_0}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{1}{\sqrt{(x_1-y)^2 + h^2}^3} dy \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= -\frac{hI_0}{4\pi} \left\{ \frac{x_1+a}{h^2 \sqrt{(a+x_1)^2 + h^2}} + \frac{a-x_1}{h^2 \sqrt{(a-x_1)^2 + h^2}} \right\} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{I_0}{4\pi h} \left\{ \frac{x_1+a}{\sqrt{(a+x_1)^2 + h^2}} + \frac{a-x_1}{\sqrt{(a-x_1)^2 + h^2}} \right\} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

Durch Rotation und Translation lässt sich nun das Magnetfeld jedes endlichen geraden Drahts an jedem Punkt im Raum berechnen.

3.2 Tikhonov-Regularisierung mit finiter Integration

Obwohl der diskrete inverse Biot-Savart-Operator im Gegensatz zu seinem kontinuierlichen Pendant beschränkt ist, ist diese Schranke sehr groß (siehe Abbildungen 4.3 und 4.4) und es hat sich in der Praxis herausgestellt, dass auch in diesem Fall eine Regularisierung notwendig ist, um stabile Rekonstruktionen zu erhalten.

Wir wenden die Tikhonov-Regularisierung aus Satz 2.22 auf unser spezielles Problem der Magnetotomographie an, wobei der Biot-Savart-Operator mit der finiten Integration diskretisiert wird. Wir erhalten eine $3n \times n_A$ -Matrix

$$\mathbf{W}^{(A)} := \mathbf{W}, \quad (3.5)$$

wobei n die Anzahl der Messpunkte auf der Messoberfläche ∂G und $n_A := N$ die Anzahl der Drähte im Netzwerk bezeichnet. Wir bezeichnen das auf ∂G gemessene diskrete Magnetfeld mit $\mathbf{H}_{\text{mess}}$ und können dann die Gleichung

$$\mathbf{W}^{(A)} \mathbf{J} = \mathbf{H}_{\text{mess}} \quad (3.6)$$

durch Tikhonov-Regularisierung durch Setzen von

$$\mathbf{R}_\alpha := \left(\alpha \mathbf{I} + \mathbf{W}^{(A)*} \mathbf{W}^{(A)} \right)^{-1} \mathbf{W}^{(A)*}$$

mit Regularisierungsparameter $\alpha > 0$ approximativ lösen. Zur Wahl des Regularisierungsparameters verweisen wir auf Standardresultate in [EHN96]. Den Rekonstruktionsraum bezeichnen wir mit X_A . Diese gewöhnliche Tikhonov-Regularisierung wurde auf die Magnetotomographie in [KKP02] angewendet, was die prinzipielle Durchführbarkeit der Stromrekonstruktion zeigt, aber gleichzeitig die starke Schlechtgestelltheit des inversen Problems ausweist.

Um eine prägnante Zusammenfassung der vorgestellten Algorithmen zu erreichen, greifen wir auf die so genannte *Pseudocode-Notation* zurück, einer nicht standardisierten Mischung aus natürlicher Sprache, mathematischer Notation und Programmiersprache. Ziel ist es auf der einen Seite, eine präzise Darstellung zu erreichen, die leicht in Programmcode umgesetzt werden kann, auf der anderen Seite aber lesbar ist, ohne sich in programmiertechnischen Details zu verlieren.

Algorithmus A. Gewöhnliche Tikhonov-Regularisierung

```

function PLAINTIKHONOV( $\alpha$ ,  $\mathbf{H}$ )
    berechne  $\mathbf{W}^{(A)}$  durch finite Integration
     $\mathbf{R}_\alpha := (\alpha \mathbf{I} + \mathbf{W}^{(A)*} \mathbf{W}^{(A)})^{-1} \mathbf{W}^{(A)*}$ 
     $\mathbf{J} := \mathbf{R}_\alpha \mathbf{H}$ 
    return  $\mathbf{J}$ 
end function

```

In den folgenden Abschnitten kombinieren wir Projektionsalgorithmen, die weiteres a-priori-Wissen beinhalten, mit dem klassischen tikhonovartigen Regularisierungsschema.

3.3 Divergenzfreie Tikhonov-Regularisierung

Bei der Behandlung des inversen Problems wie in Abschnitt 3.2 mit finiter Integration fließt keinerlei Vorwissen über die wahre Stromverteilung in das Design der Methode ein. Wir rufen in Erinnerung, dass die Stromverteilung j

die Maxwell-Gleichungen erfüllt und wegen (2.21) divergenzfrei ist. Daher ist es Erfolg versprechend, diese Bedingung zu nutzen, um den Lösungsraum einzuschränken und so bessere Rekonstruktionen zu erlangen.

Wir benutzen dabei die diskretisierte Version dieser Bedingung, die in Gleichung (3.2) bereits als *Kirchhoff'sche Knotenregel* eingeführt wurde, um den endlich-dimensionalen Lösungsraum X_B zu wählen. Dazu stellen wir nun die diskrete Divergenz-Matrix $\mathbf{T}$ wie in Abschnitt 3.1 beschrieben auf. Da die diskrete Lösung $\mathbf{J}$ die Gleichung

$$\mathbf{T}\mathbf{J} = \mathbf{b}$$

mit $\mathbf{b}$ wie in (3.1) erfüllt, nehmen wir an, dass diese Gleichung eine spezielle Lösung j_0 hat. Mit j_0 ist die allgemeine Lösung dieser Gleichung durch

$$j_{\text{gen}} = j_0 + \mathbf{N}z \quad (3.7)$$

mit einer Matrix $\mathbf{N}$, deren Spalten eine Basis des Nullraums von $\mathbf{T}$ bilden, und beliebigem z gegeben. Im Hinblick auf die Analyse der Algorithmen in Kapitel 4 wählen wir $\mathbf{N}$ als orthonormale Basis von $N(\mathbf{T})$. Einsetzen von (3.7) in Gleichung (3.6) ergibt

$$\mathbf{W}(j_0 + \mathbf{N}z) = \mathbf{H}_{\text{mess}}$$

und durch Umformen

$$(\mathbf{W}\mathbf{N})z = \mathbf{H}_{\text{mess}} - \mathbf{W}j_0. \quad (3.8)$$

Wir definieren

$$\mathbf{W}^{(B)} := \mathbf{W}\mathbf{N} \quad (3.9)$$

und lösen diese Gleichung nun mit

$$\mathbf{R}_\alpha := \left(\alpha \mathbf{I} + \mathbf{W}^{(B)*} \mathbf{W}^{(B)} \right)^{-1} \mathbf{W}^{(B)*}, \quad \alpha > 0$$

approximativ durch Tikhonov-Regularisierung. Eine Lösung $\mathbf{J}$ von (3.6) kann nun durch Setzen von

$$\mathbf{J} := j_0 + \mathbf{N}\mathbf{R}_\alpha(\mathbf{H}_{\text{mess}} - \mathbf{W}j_0)$$

erlangt werden.

Die diskrete Divergenz-Matrix $\mathbf{T}$ hat N Spalten und K Zeilen, von denen $K - 1$ linear unabhängig sind (vergleiche [KK93], Kapitel 3), der Nullraum $N(\mathbf{T})$ hat also die Dimension $N - K + 1$ und $\mathbf{N}$ ist eine $N \times (N - K + 1)$ -Matrix. Also gilt

$$\begin{aligned} n_B &:= \dim X_B = N - K + 1 \\ &= 3n_1n_2n_3 - n_1n_2 - n_1n_3 - n_2n_3 - (n_1n_2n_3 - 1) \\ &= 2n_1n_2n_3 - n_1n_2 - n_1n_3 - n_2n_3 + 1. \end{aligned}$$

Abschließend fassen wir diesen Algorithmus noch im Pseudocode zusammen.

Algorithmus B. Divergenzfreie Tikhonov-Regularisierung

```
function DIVERGENCEFREETIKHONOV( $\alpha, \mathbf{b}_{\text{div}}, \mathbf{H}$ )
  berechne  $\mathbf{W}$  durch finite Integration
  berechne  $\mathbf{T}$  wie in Abschnitt 3.3 beschrieben
  berechne eine Lösung  $j_0$  von  $\mathbf{T}\mathbf{J} = \mathbf{b}_{\text{div}}$ 
  berechne orthonormale Basis  $\mathbf{N}$  von  $N(\mathbf{T})$ 
   $\mathbf{W}^{(B)} := \mathbf{W}\mathbf{N}$ 
   $\mathbf{R}_\alpha := (\alpha\mathbf{I} + \mathbf{W}^{(B)*}\mathbf{W}^{(B)})^{-1}\mathbf{W}^{(B)*}$ 
   $\mathbf{J} := j_0 + \mathbf{N}\mathbf{R}_\alpha(\mathbf{H} - \mathbf{W}j_0)$ 
  return  $\mathbf{J}$ 
end function
```

3.4 Projektionsmethode mit spezieller Basis

Bei der in diesem Abschnitt betrachteten Methode verwenden wir eine Basis aus Stromverteilungen, wobei jedes Basiselement ein Randwertproblem (2.21)–(2.24) mit unterschiedlicher Leitfähigkeit σ löst. Dies führt zu einer Projektionsmethode mit der speziellen Basis $\{\mathbf{J}_k : k = 1, \dots, n_C\}$ des Lösungsraums X_C mit

$$n_C := \dim X_C = n_1n_2(n_3 - 1)$$

aus Stromverteilungen mit variierten Leitfähigkeiten in einzelnen Drähten in x_3 -Richtung. Hier konstruieren wir die Basis so, dass die x_3 -Komponenten approximativ eine Haar-Basis bilden, das heißt, sie sind näherungsweise ein Vielfaches von Eins in einem Bereich und nahe Null in allen anderen.

Wir rufen ins Gedächtnis, dass die Leitfähigkeit in x_1 - x_2 -Ebenen in der Brennstoffzellenanwendung durch die Verwendung metallischer und graphitischer Komponenten für Bipolar- und Endplatten gewöhnlich sehr hoch ist. Deshalb benutzen wir eine gleichmäßig hohe Leitfähigkeit σ_1 in allen Drähten in x_1 - x_2 -Richtung. Die grundsätzliche Idee ist nun, den Ansatz

$$\mathbf{J} = \sum_{k=1}^{n_C} \xi_k \mathbf{J}_k$$

zu verwenden. Dabei bezeichnet $\mathbf{J}_k$ eine Stromverteilung, bei der die Leitfähigkeit in Draht k in x_3 -Richtung auf σ_0 und in allen anderen Drähten in x_3 -Richtung auf σ_2 mit $0 < \sigma_2 \ll \sigma_0 \ll \sigma_1$ gesetzt wird, da veränderte Leitfähigkeiten nur in x_3 -Richtung auftreten.

Diese Stromverteilungen $\mathbf{J}_k$ sind Lösungen des Randwertproblems und können durch die Knoten- und Maschenregeln, wie in Abschnitt 3.1 beschrieben, berechnet werden. Im Hinblick auf Kapitel 4 merken wir an, dass $\{\mathbf{J}_1, \dots, \mathbf{J}_{n_C}\}$ keine orthonormale Basis von X_C bildet. Daher orthonormalisieren wir an dieser Stelle $\{\mathbf{J}_1, \dots, \mathbf{J}_{n_C}\}$ zu einer Basis $\{\tilde{\mathbf{J}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{J}}_{n_C}\}$, obwohl wir aus Gründen der Einfachheit die Projektionsmethode auch ohne die Orthonormalisierung mit zufrieden stellenden Resultaten angewendet haben. Das Magnetfeld eines Elements $\mathbf{J} \in X_C$ an einem Punkt $x \in \Omega_e$ kann nun durch

$$(\mathbf{W}\mathbf{J})(x) = \sum_{k=1}^{n_C} \xi_k (\mathbf{W}\tilde{\mathbf{J}}_k)(x)$$

berechnet werden. Wir definieren $H_k := \mathbf{W}\tilde{\mathbf{J}}_k, k = 1, \dots, n_C$ durch Auswerten des Biot-Savart-Operators an jedem Messpunkt und stellen die $3n \times n_C$ -Matrix

$$\mathbf{W}^{(C)} := (H_1, \dots, H_{n_C}) \quad (3.10)$$

aus den Spaltenvektoren H_k auf. Anschließend kann das schlecht gestellte lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{W}^{(C)} \xi = \mathbf{H}_{\text{mess}} \quad (3.11)$$

für die Koeffizienten $\xi := (\xi_1, \dots, \xi_{n_C})^T$ ebenfalls mit Tikhonov-Regularisierung analog zu Abschnitt 3.2 gelöst werden. Eine Lösung $\mathbf{J}$ der Ursprungsgleichung ist dann durch

$$\mathbf{J} := \sum_{k=1}^{n_C} \xi_k \tilde{\mathbf{J}}_k \quad (3.12)$$

gegeben.

Ein $\mathbf{J}$ aus (3.12) löst im Allgemeinen nicht das Randwertproblem, allerdings ist $\mathbf{J}$ wegen der Linearität des Divergenzoperators ebenfalls divergenzfrei.

Wir schließen diesen Abschnitt ebenfalls mit der Präsentation des Pseudocodes für diesen Algorithmus.

Algorithmus C. Projektionsmethode mit spezieller Basis

function SPECIALBASISPROJECTION($\alpha, \mathbf{H}$)

 berechne $\mathbf{W}$ durch finite Integration

for $k = 1, \dots, n_C$ **do**

 berechne Stromverteilung $\mathbf{J}_k$ mit erhöhter Leitfähigkeit σ_0 in Draht k

end for

 orthonormalisiere $\{\mathbf{J}_1, \dots, \mathbf{J}_{n_C}\}$

$\mathbf{W}^{(C)} := (\mathbf{W}\tilde{\mathbf{J}}_1, \dots, \mathbf{W}\tilde{\mathbf{J}}_{n_C})$

$\mathbf{R}_\alpha := (\alpha\mathbf{I} + \mathbf{W}^{(C)*}\mathbf{W}^{(C)})^{-1}\mathbf{W}^{(C)*}$

$\tilde{\xi} := \mathbf{R}_\alpha \mathbf{H}$

$\mathbf{J} := \sum_{k=1}^{n_C} \tilde{\xi}_k \tilde{\mathbf{J}}_k$

return $\mathbf{J}$

end function

4

Der Einfluss von a-priori-Wissen

Dieses Kapitel dient zur Untersuchung des Einflusses von a-priori-Wissen auf die Rekonstruktion der Stromverteilung. Die Stabilität der vorgestellten Algorithmen wird dabei über eine Analyse der Singulärwerte der auftretenden Operatoren charakterisiert. Grob gesprochen zeigen wir, dass die Verwendung von a-priori-Wissen zu größeren Singulärwerten in der entsprechenden Tikhonov-Matrix und damit zu stabileren Rekonstruktionen führt.

Die Herangehensweise ist dabei die folgende: Zuerst wird in Abschnitt 4.1 ein generischer Rahmen geschaffen, in den die in den Abschnitten 3.2, 3.3 und 3.4 vorgestellten Algorithmen zur Magnetotomographie eingebettet werden. Abschnitt 4.2 dient schließlich dazu, die Abschätzungen zu evaluieren und auf ein realistisches Setup anzuwenden.

Wir zeigen numerisch, dass die Schlechtgestelltheit des Problems signifikant verringert wird, wenn die Bedingungen (B) und (C) aus den Abschnitten 3.3 und 3.4 in entsprechender Weise bei der Konzeption der Rekonstruktionsmethode eingearbeitet werden. Dabei erhalten wir sowohl *qualitative* Abschätzungen der Singulärwerte der betrachteten Operatoren als auch Ergebnisse über die *quantitative* Verbesserung, die erlangt werden kann. Dies wird sowohl auf der theoretischen Seite durch die Berechnung geeigneter Abschätzungen für die Singulärwerte der Operatoren als auch auf der praktischen Seite durch explizite Berechnung der Singulärwerte für typische Anwendungen erfolgen. Wir vergleichen diese Abschätzungen mit den Verbesserungen, die durch Veränderung zentraler Inversionsparameter wie der Distanz der Messoberfläche ∂G zu Ω erreicht werden können.

4.1 Algorithmische Stabilitätsanalyse in Abhängigkeit des a-priori-Wissens

Der Satz von Picard (Satz 2.28) zeigt die Abhängigkeit der Schlechtgestelltheit der Gleichung $A\varphi = f$ mit kompaktem Operator A von den Singulärwerten μ_k von A . Wenn wir die rechte Seite f durch $f^\delta = f + \delta g_k$ stören, erhalten wir die Lösung $\varphi^\delta = \varphi + \delta \mu_k^{-1} \varphi_k$. Daher kann das Verhältnis

$$\frac{\|\varphi^\delta - \varphi\|}{\|f^\delta - f\|} = \frac{1}{\mu_k}$$

beliebig groß werden, da die Singulärwerte gegen 0 streben. Der Einfluss von Fehlern in den Daten f wird offensichtlich von der Konvergenzrate der Singulärwerte bestimmt.

Ein Hauptwerkzeug bei der Analyse der in Kapitel 3 vorgestellten Algorithmen ist das *Courant'sche Minimum-Maximum-Prinzip*, das wir als Fundament der folgenden Überlegungen bereitstellen.

Satz 4.1 (Courant) *Sei $\mathbf{A}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ ein nicht negativer selbstadjungierter Operator und $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ die entsprechend ihrer Größe mit Vielfachheit geordneten nicht negativen Eigenwerte von $\mathbf{A}$. Dann ist*

$$\lambda_k = \min_{U_k \in M_k} \left(\max_{\substack{x \in U_k \\ x \neq 0}} \frac{(\mathbf{A}x, x)}{(x, x)} \right), \quad k = 1, \dots, n.$$

Dabei bezeichnet M_k die Menge aller $(n + 1 - k)$ -dimensionaler Unterräume von $\mathbb{C}^n$.

BEWEIS. Ein Beweis findet sich in [Kre03], Satz 5.6. □

Zuerst stellen wir nun einen generischen Rahmen im Hinblick auf Unterräume auf und wenden ihn danach auf unseren Spezialfall der Magnetotomographie an.

Definition 4.2 Wir definieren $X := \mathbb{C}^n$ und $Y := \mathbb{C}^m$ und betrachten einen linearen beschränkten Operator $\mathbf{A}: X \rightarrow Y$. Für einen Unterraum $V \subset X$ definieren wir $\mathbf{A}_V: V \rightarrow Y$ durch $\mathbf{A}_V := \mathbf{A}|_V$ als die Einschränkung von

$\mathbf{A}$ auf V . $\mathbf{A}_V^*: Y \rightarrow V$ ist der zu $\mathbf{A}_V$ adjungierte Operator, der durch

$$(\mathbf{A}_V x, y)_Y = (x, \mathbf{A}_V^* y)_V, \quad x \in V, y \in Y$$

bestimmt wird.

Aus Satz 2.24 folgt, dass die Beziehung

$$N(\mathbf{A}_V^*) = \mathbf{A}(V)^\perp$$

gilt. Der Operator $\mathbf{A}_V^* \mathbf{A}$ ist selbstadjungiert auf V , denn für $x, z \in V$ gilt

$$(z, \mathbf{A}_V^* \mathbf{A} x)_V = (\mathbf{A}_V z, \mathbf{A} x)_Y = (\mathbf{A} z, \mathbf{A}_V x)_Y = (\mathbf{A}_V^* \mathbf{A} z, x)_V.$$

Wir sammeln noch einige Eigenschaften der adjungierten Operatoren auf Unterräumen $\tilde{V} \subset V \subset X$.

Lemma 4.3 Seien $\tilde{V} \subset V \subset X$ Unterräume und betrachte die adjungierten Operatoren $\mathbf{A}_V^*$ von $\mathbf{A}_V: V \rightarrow Y$ und $\mathbf{A}_{\tilde{V}}^*$ von $\mathbf{A}_{\tilde{V}}: \tilde{V} \rightarrow Y$, die aus der Einschränkung von A auf V beziehungsweise $\tilde{V}$ entstehen. Sei weiter $\mathbf{P}: V \rightarrow \tilde{V}$ der orthogonale Projektionsoperator von V auf $\tilde{V} \subset V$. Dann gilt

$$\mathbf{A}_{\tilde{V}}^* = \mathbf{P} \mathbf{A}_V^*.$$

BEWEIS. Wir definieren $\mathbf{Q} := \mathbf{I} - \mathbf{P}$ und schreiben $x = \mathbf{Q}x + \mathbf{P}x$ für $x \in V$. Für $x \in \tilde{V}$ erhalten wir $\mathbf{Q}x = 0$ und berechnen für $y \in Y$

$$\begin{aligned} (x, \mathbf{P} \mathbf{A}_V^* y) &\stackrel{\mathbf{P}=\mathbf{I}-\mathbf{Q}}{=} (x, \mathbf{A}_V^* y - \mathbf{Q} \mathbf{A}_V^* y) \stackrel{\mathbf{P}x=x}{=} (\mathbf{P}x, \mathbf{A}_V^* y - \mathbf{Q} \mathbf{A}_V^* y) \\ &\stackrel{\mathbf{P}(V)^\perp \mathbf{Q}(V)}{=} (x, \mathbf{A}_V^* y) = (\mathbf{A}_V x, y) \stackrel{x \in \tilde{V} \subset V}{=} (\mathbf{A}_{\tilde{V}} x, y) \\ &= (x, \mathbf{A}_{\tilde{V}}^* y). \end{aligned}$$

Daraus folgt $(x, (\mathbf{P} \mathbf{A}_V^* - \mathbf{A}_{\tilde{V}}^*) y) = 0$ für alle $x \in \tilde{V}$ und somit $\mathbf{A}_{\tilde{V}}^* = \mathbf{P} \mathbf{A}_V^*$. $\square$

Nun beweisen wir eine Monotonie-Eigenschaft der Singulärwerte in Bezug auf Unterräume.

Satz 4.4 Seien $V, \tilde{V} \subset \mathbb{C}^n$ Unterräume von $\mathbb{C}^n$ der Dimensionen n beziehungsweise $\tilde{n}$ mit $\tilde{V} \subset V$. Wir bezeichnen die Singulärwerte von $\mathbf{A}_V$ und $\mathbf{A}_{\tilde{V}}$ mit μ_k und $\tilde{\mu}_k$

für $k = 1, \dots, n$ beziehungsweise $k = 1, \dots, \tilde{n}$ und ordnen sie entsprechend ihrer Vielfachheit absteigend an. Dann erhalten wir die Abschätzung

$$\mu_{n+1-k} \leq \mu_{\tilde{n}+1-k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \tilde{n}.$$

BEWEIS. Wir wenden das Courant'sche Minimum-Maximum-Prinzip auf die Eigenwerte λ_k von $\mathbf{A}_V^* \mathbf{A}_V$ und die Eigenwerte $\tilde{\lambda}_k$ von $\mathbf{A}_{\tilde{V}}^* \mathbf{A}_{\tilde{V}}$ an und erhalten

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1-k} &= \min_{\substack{U \subset V \\ \dim U = k}} \left(\max_{\substack{x \in U \\ x \neq 0}} \frac{(\mathbf{A}_V^* \mathbf{A}_V x, x)}{(x, x)} \right) \\ &= \min_{\substack{U \subset V \\ \dim U = k}} \left(\max_{\substack{x \in U \\ x \neq 0}} \frac{(\mathbf{A}_V x, \mathbf{A}_V x)}{(x, x)} \right) \\ &\leq \min_{\substack{\tilde{U} \subset \tilde{V} \\ \dim \tilde{U} = k}} \left(\max_{\substack{x \in \tilde{U} \\ x \neq 0}} \frac{(\mathbf{A}_V x, \mathbf{A}_V x)}{(x, x)} \right) \\ &= \min_{\substack{\tilde{U} \subset \tilde{V} \\ \dim \tilde{U} = k}} \left(\max_{\substack{x \in \tilde{U} \\ x \neq 0}} \frac{(\mathbf{A}_{\tilde{V}} x, \mathbf{A}_{\tilde{V}} x)}{(x, x)} \right) \\ &= \min_{\substack{\tilde{U} \subset \tilde{V} \\ \dim \tilde{U} = k}} \left(\max_{\substack{x \in \tilde{U} \\ x \neq 0}} \frac{(\mathbf{A}_{\tilde{V}}^* \mathbf{A}_{\tilde{V}} x, x)}{(x, x)} \right) \\ &= \tilde{\lambda}_{\tilde{n}+1-k} \end{aligned}$$

für $k = 1, \dots, \tilde{n}$. Durch Ziehen der Wurzel auf beiden Seiten der Gleichung erhalten wir die Aussage des Satzes. $\square$

Wir wenden dieses allgemeine Resultat auf die Magnetotomographie an. Die Unterräume werden hierbei durch die Operatoren der Algorithmen (A), (B) und (C) in (3.5), (3.9) und (3.10) bestimmt. Für die Dimensionen der Rekonstruktionsräume gilt

- $n_A := \dim X_A = 3n_1n_2n_3 - n_1n_2 - n_1n_3 - n_2n_3$ (Anzahl der Kanten insgesamt)
- $n_B := \dim X_B = 2n_1n_2n_3 - n_1n_2 - n_1n_3 - n_2n_3 + 1$ (Dimension von $N(\mathbf{T})$)

- $n_C := \dim X_C = n_1 n_2 (n_3 - 1)$ (Anzahl der Kanten in x_3 -Richtung).

Wir setzen hierbei sinnvollerweise $n_1, n_2, n_3 \geq 2$ voraus.

Satz 4.5 Betrachte die drei Methoden (A), (B) und (C) aus Kapitel 3,

- die gewöhnliche Tikhonov-Regularisierung gegeben durch (3.6),
- die divergenzfreie Tikhonov-Regularisierung gegeben durch (3.8) und
- die Projektionsmethode gegeben durch (3.11).

Für die absteigend geordneten Singulärwerte

$$\begin{aligned}\mu_1^{(A)} &\geq \cdots \geq \mu_{n_A}^{(A)}, \\ \mu_1^{(B)} &\geq \cdots \geq \mu_{n_B}^{(B)} \quad \text{und} \\ \mu_1^{(C)} &\geq \cdots \geq \mu_{n_C}^{(C)}\end{aligned}$$

der Matrizen $\mathbf{W}^{(A)}$, $\mathbf{W}^{(B)}$ und $\mathbf{W}^{(C)}$ aus (3.5), (3.9) und (3.10) gelten die Abschätzungen

$$\mu_{n_A+1-k}^{(A)} \leq \mu_{n_B+1-k}^{(B)} \leq \mu_{n_C+1-k}^{(C)} \quad (4.1)$$

für $k = 1, 2, \dots, n_C$.

BEWEIS. In Abschnitt 3.3 haben wir die Spalten von $\mathbf{N}$ so gewählt, dass sie eine orthonormale Basis von $N(\mathbf{T})$ bilden. Die Abbildung $z \mapsto \mathbf{W}\mathbf{N}z$ können wir als Einschränkung der Abbildung $\mathbf{W}$ auf $X_B := \text{span}\{v_1, \dots, v_{n_B}\}$ auffassen, wobei v_j die Spalten von $\mathbf{N}$ sind. Die Abbildung $\mathbf{N}$ ist injektiv, da ihre Spalten eine Basis von $N(\mathbf{T})$ darstellen und die Matrix somit vollen Spaltenrang hat. Da die Spalten von $\mathbf{N}$ orthonormal sind, ist die Abbildung normerhaltend und bildet die Menge der Unterräume von $\mathbb{C}^{n_B}$ injektiv auf die Menge der Unterräume von X_B ab. $\mathbf{W}\mathbf{N}$ und $\mathbf{W}|_{X_B}$ haben also dieselben Singulärwerte, denn es gilt

$$\begin{aligned}\min_{\substack{U \subset \mathbb{C}^{n_B} \\ \dim U = k}} \left(\max_{\substack{z \in U \\ z \neq 0}} \frac{(\mathbf{W}\mathbf{N}z, \mathbf{W}\mathbf{N}z)}{(z, z)} \right) &= \min_{\substack{U \subset \mathbb{C}^{n_B} \\ \dim U = k}} \left(\max_{\substack{z \in U \\ z \neq 0}} \frac{(\mathbf{W}\mathbf{N}z, \mathbf{W}\mathbf{N}z)}{(\mathbf{N}z, \mathbf{N}z)} \right) \\ &= \min_{\substack{\tilde{U} \subset X_B \\ \dim \tilde{U} = k}} \left(\max_{\substack{x \in \tilde{U} \\ x \neq 0}} \frac{(\mathbf{W}|_{X_B} x, \mathbf{W}|_{X_B} x)}{(x, x)} \right).\end{aligned}$$

Wir können nun Satz 4.4 anwenden, der die erste Ungleichung liefert.

Zum Beweis der zweiten Ungleichung erinnern wir daran, dass der Rekonstruktionsraum X_C die orthonormale Basis $\{\tilde{J}_1, \dots, \tilde{J}_{n_C}\}$ besitzt. Ein Element $J \in X_C$ ist wegen der Linearität des Divergenzoperators divergenzfrei, daher ist X_C ein Unterraum von X_B . Mit analoger Argumentation wie oben kann gezeigt werden, dass $\mathbf{W}^{(C)}$ und $\mathbf{W}|_{X_C}$ dieselben Singulärwerte haben. Satz 4.4 liefert dann wie oben die Abschätzung. $\square$

Wir haben gezeigt, dass die Verwendung von a-priori-Wissen durch die Kirchhoff'schen Knotenregeln und Spezialbasisfunktionen zu besseren Abschätzungen für die Inversion führt als die Rekonstruktionen mit dem reinen Biot-Savart-Operator. Im nächsten Abschnitt präsentieren wir einige numerische Ergebnisse, die die obigen Abschätzungen bestätigen und die Größe der Konstanten für einige wichtige Beispiele der Magnetotomographie ermitteln.

4.2 Evaluation von Stabilitätskonstanten für ein realistisches Setup

Wir verwenden ein $7 \times 7 \times 2$ -Gitter, um eine Einzelzelle wie in Abbildung 4.1 zu simulieren. Diese Diskretisierung ist praxisrelevant und auf einem Desktop-Computer mit akzeptablem Zeit- und Speicheraufwand berechenbar. 296 Messpunkte werden äquidistant auf der Oberfläche eines Kubus in einem Abstand von 60 mm um das Gitternetz platziert.

Wir präsentieren eine numerische Spektralanalyse für dieses Beispiel. Abbildung 4.2 zeigt die Singulärwerte der Matrizen $\mathbf{W}^{(A)}$, $\mathbf{W}^{(B)}$ und $\mathbf{W}^{(C)}$, die in Kapitel 3 eingeführt wurden. In diesem Fall unterscheiden sich die kleinsten Singulärwerte sowohl zwischen Algorithmus (A) und (B) als auch zwischen (B) und (C) um einen Faktor zwischen 10 und 100. Die Singulärwerte sind dabei aufsteigend geordnet, um die Abschätzung aus (4.1) zu verdeutlichen.

Abbildung 4.3 zeigt einen Vergleich der Kehrwerte der Singulärwerte der einzelnen Matrizen mit den Singulärwerten der zugehörigen Tikhonov-Matrizen. Die Bedeutung der Kehrwerte erschließt sich aus dem Satz von Picard (Satz 2.28) und der damit verbundenen Fehlerverstärkung bei der Inversion. Die Tikhonov-Regularisierung bewirkt dabei eine Dämpfung der Reziproken der Singulärwerte.

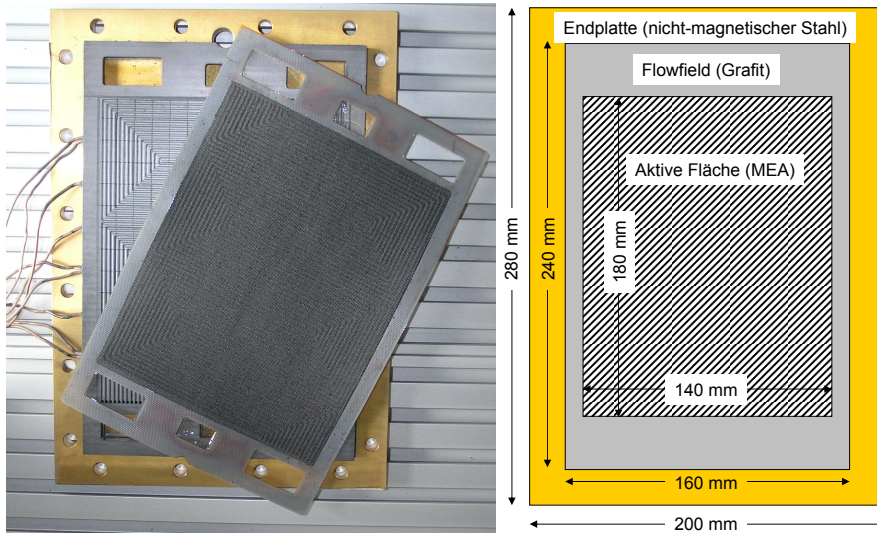


Abbildung 4.1: Zellkomponenten (Endplatte, segmentierter Strömungsverteiler und Membran-Elektroden-Einheit (MEA)), Abmessungen der Zellkomponenten

Es ist zu erwarten, dass das Problem besser gestellt wird, wenn der Abstand der Messoberfläche zu Ω auf 30 mm halbiert wird. Abbildung 4.4 zeigt, dass durch den verringerten Abstand die Singulärwerte am unteren Ende des Spektrums etwa um den Faktor 100 vergrößert werden. In Abbildung 4.4 sind wieder die Kehrwerte der Singulärwerte aufgetragen. Es wird auch deutlich, dass im Vergleich zu Abbildung 4.3 bei gleichem Regularisierungsparameter wesentlich weniger Singulärwerte von der Regularisierung beeinflusst werden, der entsprechende Tikhonov-Operator also eine bessere Approximation an $\mathbf{W}^{(A)}$, $\mathbf{W}^{(B)}$ oder $\mathbf{W}^{(C)}$ darstellt.

Tabelle 4.1 zeigt die Rekonstruktionsfehler für dieses Beispiel mit einem Abstand der Messpunkte zur Brennstoffzelle von 60 mm, 45 mm, 30 mm und 15 mm und untermauert damit die Abschätzungen der Singulärwerte aus den Abbildungen 4.3 und 4.4. Das simulierte Magnetfeld wird durch einen gleichverteilten relativen Datenfehler von 5 % in der diskreten L^2 -Norm $\|\cdot\|_2$ gestört.

Als nächstes vergleichen wir die Rekonstruktionsergebnisse für die drei Methoden (A), (B) und (C). Um die Ausgangsstromdichte zu erhalten, wurde die Leitfähigkeit in zwei Drähten in x_3 -Richtung verringert. Die Stromverteilung und das Magnetfeld wurden dann wie in Abschnitt 3.1 beschrieben berech-

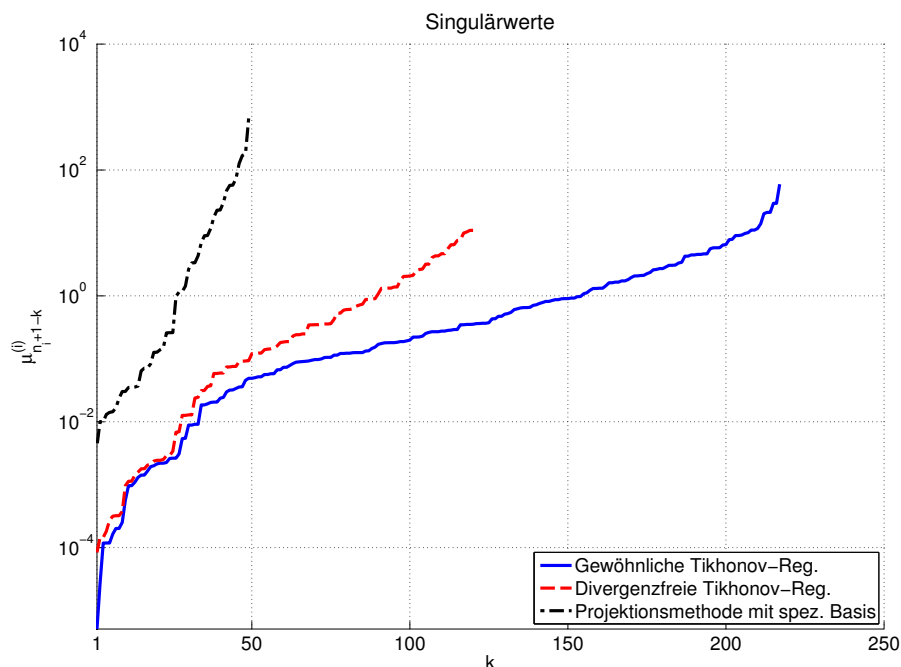


Abbildung 4.2: Vergleich der Singularwerte von $\mathbf{W}^{(A)}$, $\mathbf{W}^{(B)}$ und $\mathbf{W}^{(C)}$. Die Messorfläche befindet sich in einem Abstand von 60 mm um das Widerstandsnetzwerk. Wir veranschaulichen Gleichung (4.1) mit $i = A, B, C$ entsprechend der Rekonstruktionsmethode.

Tabelle 4.1: Durchschnittliche Rekonstruktionsfehler für verschiedene Abstände der Messorfläche bei konstantem relativen Fehler in der rechten Seite von 5 %. Für jede Rekonstruktion wurde der optimale Regularisierungsparameter α verwendet, der aus der Kenntnis der wahren Lösung berechnet wurde. Der Fehler wird in der diskreten L^2 -Norm gemessen.

Methode	60 mm	45 mm	30 mm	15 mm
Gewöhnliche Tikhonov-Reg.	17,07 %	13,47 %	12,23 %	7,07 %
Divergenzfreie Tikhonov-Reg.	15,76 %	12,81 %	12,04 %	6,36 %
Projektionsmethode mit spez. Basis	09,75 %	07,81 %	06,65 %	5,53 %

net. Abbildung 4.5 (oben links) zeigt diese Stromverteilung. Das simulierte Magnetfeld wird durch einen gleichverteilten zufälligen Fehlervektor mit höchstens 7 % der maximalen Magnetfeldstärke in der diskreten L^2 -Norm

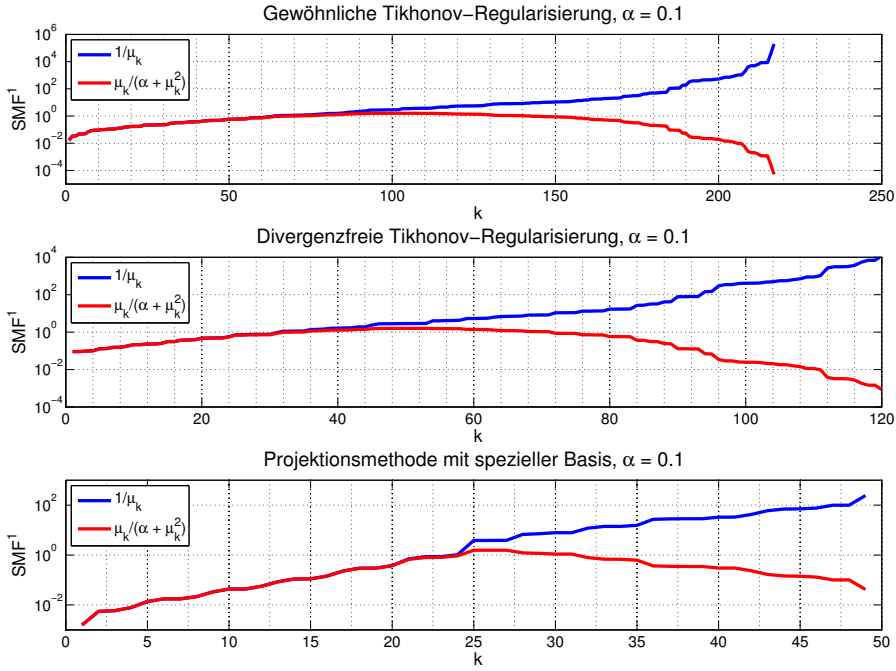


Abbildung 4.3: Vergleich des Reziproken der Singulärwerte von $\mathbf{W}^{(A)}$, $\mathbf{W}^{(B)}$ und $\mathbf{W}^{(C)}$ mit dem Reziproken der Singulärwerte des entsprechenden Tikhonov-Operators bei einem Abstand von 60 mm zwischen Ω und ∂G

¹ SMF = spectral multiplication factor

gestört. Die durchschnittliche Stromdichte liegt bei 125 mA/cm^2 , was dem Betrieb einer DMFC entspricht. In Abbildung 4.5 wird der Anzeigebereich bei 40 mA/cm^2 abgeschnitten, um Artefakte sichtbar zu machen.

Es zeigen sich deutlich die Verbesserungen, die aus dem a-priori-Wissen resultieren. Die einfache Tikhonov-Regularisierung (Methode (A)) identifiziert die Bereiche mit verringerter Leitfähigkeit korrekt, erzeugt aber starke Artefakte in der Nähe dieser Spots. Die divergenzfreie Tikhonov-Regularisierung (Methode (B)) identifiziert ebenfalls die Regionen mit verringerter Leitfähigkeit, allerdings erscheinen die zwei klar abgegrenzten Bereiche als ein einziger. Wie nach den Resultaten aus Abschnitt 4.1 erwartet, liefert die Projektionsmethode mit spezieller Basis (Methode (C)) die besten Rekonstruktionsergebnisse. Die Rekonstruktionen zeigen reduzierte Artefakte und zwei deutlich voneinander abgegrenzte Bereiche mit verringerter Stromdichte.

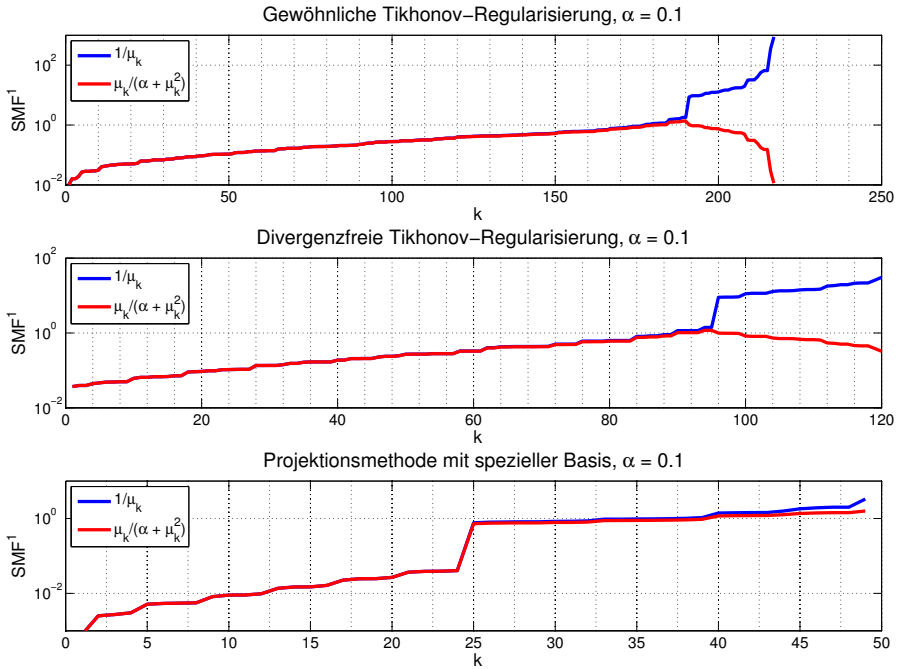


Abbildung 4.4: Vergleich des Reziproken der Singulärwerte von $\mathbf{W}^{(A)}$, $\mathbf{W}^{(B)}$ und $\mathbf{W}^{(C)}$ mit dem Reziproken der Singulärwerte des entsprechenden Tikhonov-Operators bei einem Abstand von 30 mm zwischen Ω und ∂G

¹ SMF = spectral multiplication factor

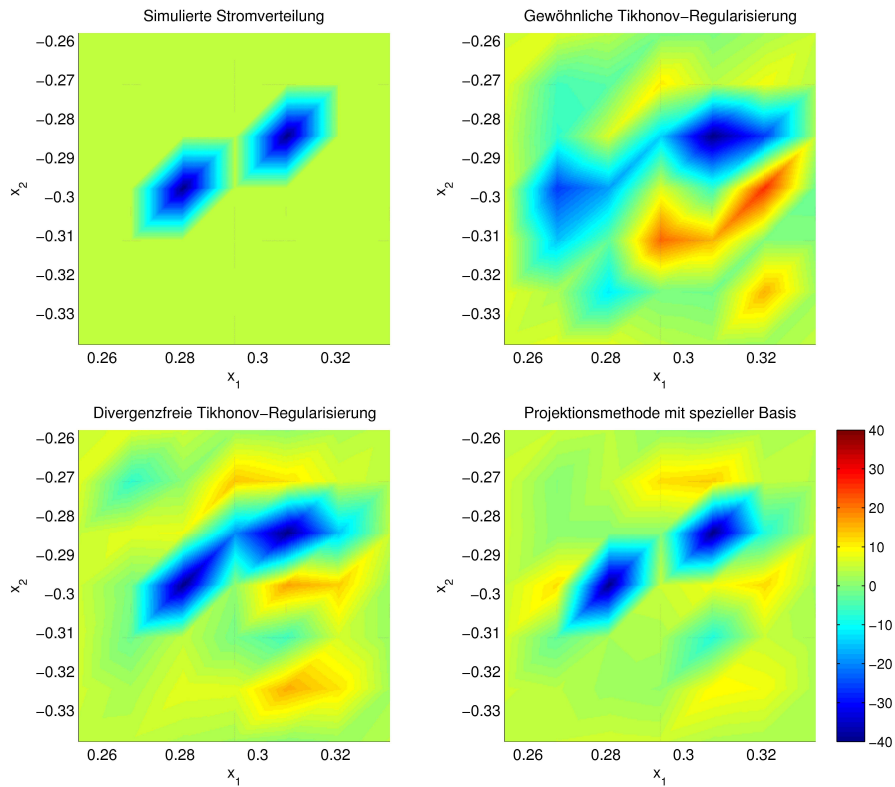


Abbildung 4.5: Von oben links nach unten rechts: Ausgangsstromverteilung, Rekonstruktion mit gewöhnlicher Tikhonov-Regularisierung (Methode (A)), divergenzfreier Tikhonov-Regularisierung (Methode (B)) und Projektionsmethode mit spezieller Basis (Methode (C)).

5

Nullraumäquivalenz für Ein- und Mehrschicht-Systeme

In diesem Kapitel untersuchen wir die Eindeutigkeit der Rekonstruktion von Stromverteilungen in *Ein-* und *Mehrschicht-Systemen*. Dieser Aufbau ist typisch für die Magnetotomographie an Brennstoffzellen und entspricht der Skizze in Abbildung 5.1. Ströme fließen in eine Platte hinein, dann durch eine Schicht und werden dann in der zweiten Platte wieder gesammelt. Ein Mehrschicht-System besteht nun aus mehreren hintereinander geschalteten Einschicht-Systemen. In der Brennstoffzellenanwendung modelliert die Schicht die Membran-Elektroden-Einheit und die Platten entsprechen den Bipolarplatten. Da die Leitfähigkeit in den Platten wesentlich größer ist als in den Schichten, nehmen wir an, dass die Ströme in den Schichten nur senkrecht zu den Platten fließen, da der Strom den Weg des geringsten Widerstands und damit den kürzesten Weg durch die Schicht nimmt.

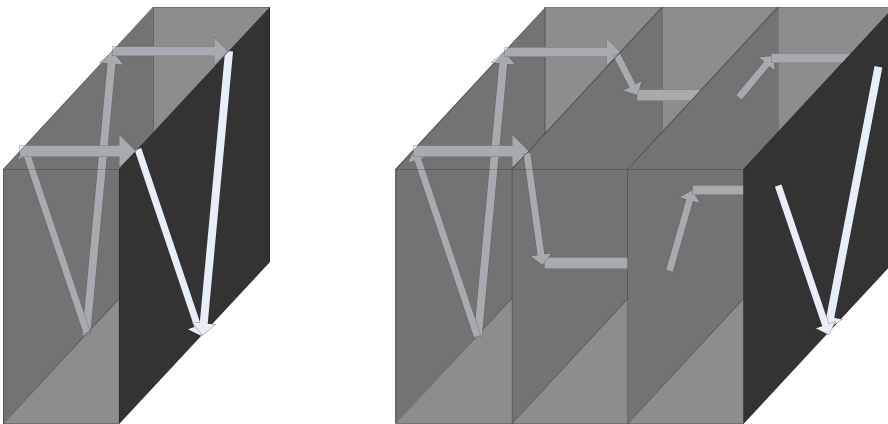


Abbildung 5.1: Aufbau eines Ein- (links) und eines Mehrschicht-Systems mit drei Schichten (rechts)

Dies ist im ersten Schritt eine sinnvolle Vereinfachung. Wenn als Strömungsverteiler so genannte Füßchen-Flowfields wie in Abbildung 5.2 verwendet werden, werden die Ströme durch die geometrischen Gegebenheiten dazu gebracht, nahezu senkrecht zur Membran-Elektroden-Einheit zu fließen. Diese Annahme wird das Schlüsselargument für das hier verwendete Modell sein.

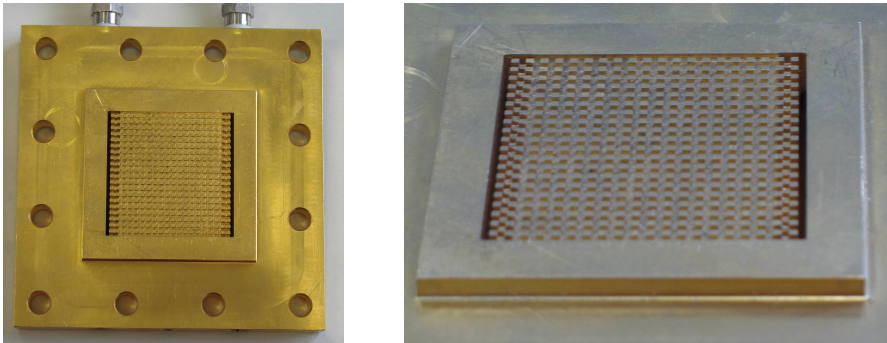


Abbildung 5.2: Strömungsverteiler mit Füßchenstruktur, Aufsicht (links), Detailansicht (rechts)

Das volle Tomographieproblem besteht darin, aus den Magnetfelddaten eine Stromverteilung in ganz Ω zu rekonstruieren. In diesem Kapitel reduzieren wir das Problem darauf, zuerst die Stromverteilung in den Platten zu rekonstruieren und daraus dann die Stromverteilung in den Schichten zu berechnen. Dazu entwickeln wir eine Methode, mit der wir die dritte Komponente des Magnetfelds eindeutig in die Anteile aufspalten, die von den Strömen in den einzelnen Platten erzeugt werden. Wir zeigen, dass die Nullräume des vollen und des reduzierten Problems äquivalent sind. Zu jeder Stromverteilung in den Platten, deren dritte Magnetfeldkomponente verschwindet, existiert genau eine Stromverteilung im ganzen Gebiet, deren Magnetfeld vollständig verschwindet und umgekehrt.

Wir beginnen dieses Kapitel in Abschnitt 5.1 mit einer detaillierten Beschreibung des Modells für das Ein- und Mehrschicht-System. Anschließend entwickeln wir in Abschnitt 5.2 eine Source-Splitting-Methode, um das Gesamtmagnetfeld in verschiedene Teilfelder aufzuteilen, die aus unterschiedlichen Bereichen entstehen. Unter der Voraussetzung, dass alle Komponenten des von den Strömen in einer Platte erzeugten Magnetfelds bekannt sind, lässt sich wie in Abschnitt 5.3 gezeigt, die Stromverteilung in der Platte direkt berechnen. In Abschnitt 5.4 zeigen wir dann Äquivalenz für die Nullräume des vollen

und des reduzierten Problems. Wir schließen dieses Kapitel in Abschnitt 5.5 mit einem Beispiel eines Nullraumelements für ein Einschicht-System.

5.1 Ein- und Mehrschicht-Systeme

In diesem Abschnitt beschreiben wir zuerst die Geometrie des *Einschicht-Systems* und erweitern diese dann auf das *Mehrschicht-System*. Die zwei Endplatten sind durch

$$\Gamma_1 := \left\{ (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : -a \leq y_1 \leq a, -b \leq y_2 \leq b, y_3 = c_1 \right\} \quad (5.1)$$

$$\Gamma_2 := \left\{ (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : -a \leq y_1 \leq a, -b \leq y_2 \leq b, y_3 = c_2 \right\} \quad (5.2)$$

mit $a, b, c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ und $c_1 < c_2$ gegeben. Mit der Schicht

$$\Lambda := \left\{ (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : -a \leq y_1 \leq a, -b \leq y_2 \leq b, c_1 < y_3 < c_2 \right\} \quad (5.3)$$

zwischen den Endplatten definieren wir dann $\Omega := \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Lambda$ und bezeichnen die Gesamtstromverteilung in Ω mit j . Wir nehmen an, dass die Ströme $j^{(1)} := j|_{\Gamma_1}$ und $j^{(2)} := j|_{\Gamma_2}$ in den Endplatten Γ_1 und Γ_2 nur in x_1 - x_2 -Richtung fließen, also

$$j^{(k)}(y) = \begin{pmatrix} j_1^{(k)}(y) \\ j_2^{(k)}(y) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y \in \Gamma_k, k = 1, 2. \quad (5.4)$$

Für die Schicht Λ nehmen wir an, dass die Ströme $j^{(\Lambda)} := j|_{\Lambda}$ nur in x_3 -Richtung fließen, also

$$j^{(\Lambda)}(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ j_3^{(\Lambda)}(y) \end{pmatrix}, \quad y \in \Lambda. \quad (5.5)$$

Wir merken an, dass es sich bei den Strömen in Γ_1 und Γ_2 um *Oberflächenströme* handelt, die Ströme in Λ hingegen *Volumenströme* sind. Daher müssen beim Übergang von Γ_1 zu Λ beziehungsweise von Λ zu Γ_2 die Kontinuitätsbedingungen

$$\nu \cdot j^{(\Lambda)} = \text{Div } j^{(1)} \quad (5.6)$$

und

$$\nu \cdot j^{(\Lambda)} = -\operatorname{Div} j^{(2)} \quad (5.7)$$

mit dem Normalenvektor $\nu := (0, 0, 1)^T$ und der Oberflächendivergenz

$$\operatorname{Div} j^{(k)} := \frac{\partial}{\partial x_1} j_1^{(k)} + \frac{\partial}{\partial x_2} j_2^{(k)}$$

erfüllt sein. Die Oberflächenströme werden also verlustfrei in Volumenströme umgewandelt und umgekehrt (siehe [Mar68], Gleichung (1.77)). Die Stromverteilung j ist divergenzfrei, das heißt für $y \in \Lambda$ folgt aus

$$\operatorname{div} j^{(\Lambda)}(y) = 0,$$

dass

$$\frac{\partial j_3^{(\Lambda)}(y)}{\partial x_3} = 0. \quad (5.8)$$

Das bedeutet, der Strom $j^{(\Lambda)}$ in Λ hängt nur von der x_1 - und x_2 -Komponente ab und ist konstant entlang Linien parallel zur x_3 -Achse.

Definition 5.1 (Einschicht-System) Ein *Einschicht-System* ist bestimmt durch eine Geometrie wie in (5.1)–(5.3) mit einer Stromverteilung $j \in Y$ mit

$$Y := \left\{ \left(j^{(1)}, j^{(\Lambda)}, j^{(2)} \right) \in H^1(\Gamma_1) \oplus Y^{(\Lambda)} \oplus H^1(\Gamma_2), \text{ (5.6) und (5.7) gelten} \right\},$$

wobei

$$Y^{(\Lambda)} := \left\{ j^{(\Lambda)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ j_3^{(\Lambda)} \end{pmatrix}, j_3^{(\Lambda)} \in L^2(\Lambda), j_3^{(\Lambda)} \text{ ist konstant in } x_3\text{-Richtung} \right\}.$$

Analog dazu definieren wir ein *Mehrschicht-System*. Im Prinzip besteht ein Mehrschicht-System aus n Einschicht-Systemen, die hintereinander geschaltet sind. Übertragen auf die Brennstoffzellenanwendung entspricht dieses Mehrschicht-System einem Brennstoffzellenstack mit n in Reihe geschalteten Einzelzellen.

Definition 5.2 (Mehrschicht-System) Ein *Mehrschicht-System* besteht aus $n + 1$ Platten

$$\Gamma_k := \left\{ (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : -a \leq y_1 \leq a, -b \leq y_2 \leq b, y_3 = c_k \right\}$$

für $k = 1, \dots, n+1$ mit $c_1 < c_2 < \dots < c_{n+1}$ und n Schichten

$$\Lambda_l := \left\{ (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : -a \leq y_1 \leq a, -b \leq y_2 \leq b, c_l < y_3 < c_{l+1} \right\}$$

für $l = 1, \dots, n$. Für das Mehrschicht-System definieren wir

$$\Omega := \left(\bigcup_{k=1}^{n+1} \Gamma_k \right) \cup \left(\bigcup_{l=1}^n \Lambda_l \right).$$

Wie in (5.4) und (5.5) nehmen wir an, dass die Ströme $j^{(k)} := j|_{\Gamma_k}$ in den Platten Γ_k nur in x_1 - x_2 -Richtung und die Ströme $j^{(\Lambda_l)} := j|_{\Lambda_l}$ in den Schichten Λ_l nur in x_3 -Richtung fließen. Die Ströme sind divergenzfrei, also gilt

$$\operatorname{div} j(y) = 0, \quad y \in \Omega,$$

woraus wie in (5.8) folgt, dass innerhalb einer Schicht die Ströme konstant in x_3 -Richtung sind. Zusätzlich gelten auch wie beim Einschicht-System die Bedingungen

$$\begin{aligned} \nu \cdot j^{(\Lambda_1)} &= \operatorname{Div} j^{(1)}, \\ \nu \cdot j^{(\Lambda_n)} &= -\operatorname{Div} j^{(n+1)} \end{aligned}$$

und

$$\nu \cdot j^{(\Lambda_{l-1})} - \nu \cdot j^{(\Lambda_l)} = \operatorname{Div} j^{(l)}$$

für $l = 2, \dots, n$ zur verlustfreien Umwandlung von Oberflächen- in Volumenströme und umgekehrt.

5.2 Source-Splitting für Magnetfelder

Eines der Hauptwerkzeuge, das wir benutzen werden, ist das Splitting des Gesamtmagnetfelds bezüglich seiner Träger. Wir werden sehen, dass die Hauptideen dieser aus der klassischen akustischen Streutheorie stammenden Methode (siehe zum Beispiel [BHLP07]) auch auf die Magnetotomographie

übertragen werden können. Wir präsentieren diese Methode in einem allgemeineren Rahmen, da sie ein analytisches Mittel ist, um Magnetfelder aufzuteilen und daher von generellem Interesse ist.

Definition 5.3 Ein Gebiet $D \subset \mathbb{R}^3$ ist *Träger* eines Magnetfelds H definiert in $\mathbb{R}^3$, falls eine Stromverteilung $j \in L^2(D)^3$ existiert, so dass

$$H = Wj \quad (5.9)$$

mit dem Biot-Savart-Operator W gegeben durch (2.29) dargestellt werden kann. Eine Oberfläche Γ der Form (5.1) ist *Träger* des Felds H , falls eine Stromverteilung $j \in L^2(\Gamma)^2$ existiert, so dass (5.9) erfüllt ist, wobei das Volumenintegral durch das Oberflächenintegral

$$H(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{|x-y|^3} \begin{pmatrix} -(x_3 - y_3)j_2(y) \\ (x_3 - y_3)j_1(y) \\ (x_1 - y_1)j_2(y) - (x_2 - y_2)j_1(y) \end{pmatrix} ds(y), x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$$

ersetzt wird.

Satz 5.4 (Eindeutigkeit des Splittings) Betrachte zwei Gebiete $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^3$ mit

$$\overline{D_1} \cap \overline{D_2} = \emptyset$$

und ein Magnetfeld H mit Träger $D := D_1 \cup D_2$. Dann kann das Magnetfeld H eindeutig aufgespalten werden in die Summe zweier Felder $H^{(1)}$ und $H^{(2)}$ mit Trägern D_1 beziehungsweise D_2 .

Die Aussage gilt auch für zwei Oberflächen Γ_1 und Γ_2 mit

$$\overline{\Gamma_1} \cap \overline{\Gamma_2} = \emptyset$$

und ein Magnetfeld H mit Träger $\Gamma := \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

BEWEIS. Die Existenz eines solchen Splittings ist klar, denn wir haben angenommen, dass H den Träger $D_1 \cup D_2$ besitzt, H kann also dargestellt werden als

$$\begin{aligned} H(x) &= \frac{1}{4\pi} \int_{D_1} \frac{(x-y) \times j^{(1)}(y)}{|x-y|^3} dy + \frac{1}{4\pi} \int_{D_2} \frac{(x-y) \times j^{(2)}(y)}{|x-y|^3} dy \\ &= H^{(1)}(x) + H^{(2)}(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus (\overline{D_1} \cup \overline{D_2}). \end{aligned}$$

Zum Beweis der Eindeutigkeit nehmen wir an, es gäbe zwei Darstellungen

$$H = H^{(1)} + H^{(2)} = \tilde{H}^{(1)} + \tilde{H}^{(2)}.$$

Wir nehmen die Differenz der beiden Darstellungen und definieren

$$\hat{H}^{(k)} := H^{(k)} - \tilde{H}^{(k)}$$

für $k = 1, 2$. Es gilt in $\mathbb{R}^3 \setminus (\overline{D_1} \cup \overline{D_2})$

$$\begin{aligned} \hat{H} &:= \hat{H}^{(1)} + \hat{H}^{(2)} \\ &= H^{(1)} - \tilde{H}^{(1)} + H^{(2)} - \tilde{H}^{(2)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Um Glattheit bis zum Rand zu garantieren, wählen wir Gebiete $\tilde{D}_1$ und $\tilde{D}_2$ mit Rändern der Klasse C^2 , so dass $\overline{D_k}$ im Inneren von $\tilde{D}_k$ enthalten ist und

$$\overline{\tilde{D}_1} \cap \overline{\tilde{D}_2} = \emptyset.$$

Nach Satz 2.43 ist das Feld $\hat{H}^{(1)}$ eine Lösung der Laplace-Gleichung in einer Umgebung von $\tilde{D}_2$. Wir argumentieren nun komponentenweise für $i = 1, 2, 3$. Auf $\partial\tilde{D}_2$ hat $\hat{H}_i^{(1)}$ die Randwerte

$$\hat{H}_i^{(1)}|_{\partial\tilde{D}_2} = -\hat{H}_i^{(2)}|_{\partial\tilde{D}_2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\hat{H}_i^{(1)}}{\partial\nu}|_{\partial\tilde{D}_2} = -\frac{\partial\hat{H}_i^{(2)}}{\partial\nu}|_{\partial\tilde{D}_2}.$$

Jetzt definieren wir ein Skalarfeld V_i durch

$$V_i(x) := \begin{cases} \hat{H}_i^{(1)}(x), & x \in \overline{\tilde{D}_2} \\ -\hat{H}_i^{(2)}(x), & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\tilde{D}_2}. \end{cases}$$

Dann erfüllt V_i die Laplace-Gleichung in $\tilde{D}_2$ und $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\tilde{D}_2}$. Das Skalarfeld V_i ist stetig auf $\partial\tilde{D}_2$ und die Normalableitung ist ebenfalls stetig. Daher bildet es im ganzen $\mathbb{R}^3$ eine Lösung der Laplace-Gleichung und hat nach (2.30) die Abfallrate

$$|V_i(x)| \leq \frac{C_i}{r^2}, \quad r := \|x\|$$

für genügend große $\|x\|$ und eine von x unabhängige Konstante $C_i > 0$. Aus dem Maximum-Minimum-Prinzip aus Satz 2.16 erhalten wir für eine Kugel $B_R(0)$ mit hinreichend großem R und $x \in B_R(0)$

$$|V_i(x)| \leq \frac{C_i}{R^2}.$$

Mit $R \rightarrow \infty$ ergibt sich nun $V_i \equiv 0$. Daraus folgt

$$H_i^{(k)} = \tilde{H}_i^{(k)} \quad \text{für } k = 1, 2$$

und der Beweis ist vollständig.

Da wir $\tilde{D}_1$ und $\tilde{D}_2$ als Gebiete mit C^2 -glatten Rändern gewählt haben, überträgt sich die Argumentation auch auf Γ_1 und Γ_2 . $\square$

Dieses Resultat kann direkt auf n Gebiete übertragen werden.

Korollar 5.5 (Eindeutigkeit des Splittings für n Gebiete) *Betrachte n Gebiete $D_1, \dots, D_n \subset \mathbb{R}^3$ mit*

$$\overline{D}_i \cap \overline{D}_j = \emptyset \quad \text{für } i \neq j$$

und ein Magnetfeld H mit Träger

$$D := \bigcup_{k=1}^n D_k.$$

Dann kann das Magnetfeld H eindeutig als Summe von n Feldern

$$H(x) = \sum_{k=1}^n H^{(k)}(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$$

geschrieben werden, wobei $H^{(k)}$ von Strömen in D_k erzeugt wird, $k = 1, \dots, n$.

BEWEIS. Wir wenden Satz 5.4 zuerst auf die Gebiete D_1 und $\tilde{D} := D_2 \cup \dots \cup D_n$ an, um ein Splitting $H = H^{(1)} + \tilde{H}$ zu erhalten. Iterative Anwendung von Satz 5.4 führt dann zu einem Splitting

$$H(x) = \sum_{k=1}^n H^{(k)}(x) \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}.$$

$\square$

Wir verwenden jetzt das obige Resultat, um die Magnetfelder zu identifizieren, die von den Strömen in den Platten Γ_k erzeugt werden. Der Einfachheit halber beschränken wir uns hier auf das Einschicht-System, werden aber den endgültigen Beweis der Äquivalenz der Nullräume in Abschnitt 5.4 auch für das Mehrschicht-System führen.

Wir bezeichnen die Magnetfelder, die von den Strömen $j^{(k)}$ in $\Gamma_k, k = 1, 2$ erzeugt werden, mit $H^{(k)}$ und das Magnetfeld, das von den Strömen $j^{(\Lambda)}$ in Λ erzeugt wird, mit $H^{(\Lambda)}$. Dann erhalten wir die Dekomposition

$$H(x) = H^{(1)}(x) + H^{(2)}(x) + H^{(\Lambda)}(x), \quad x \in \Omega_e, \quad (5.10)$$

die aus der natürlichen Aufteilung des Integrationsgebiets in

$$\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Lambda$$

entsteht. Allerdings ist diese Dekomposition nicht geeignet, um Eindeutigkeit zu erlangen, da die Gebiete keinen positiven Abstand zueinander haben. Für $H^{(\Lambda)}$ berechnen wir allerdings

$$\begin{aligned} H^{(\Lambda)}(x) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Lambda} \frac{j^{(\Lambda)}(y) \times (x - y)}{|x - y|^3} dy \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Lambda} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ j_3^{(\Lambda)}(y) \end{pmatrix} \times \frac{(x - y)}{|x - y|^3} dy \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Lambda} \frac{j_3^{(\Lambda)}(y)}{|x - y|^3} \begin{pmatrix} -(x_2 - y_2) \\ x_1 - y_1 \\ 0 \end{pmatrix} dy, \quad x \in \Omega_e. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Durch die Einschränkung, dass die Ströme in den Schichten nur in x_3 -Richtung fließen, verschwindet also die dritte Komponente des von diesen Strömen erzeugten Magnetfelds. Wir erhalten also

$$H_3(x) = H_3^{(1)}(x) + H_3^{(2)}(x), \quad x \in \Omega_e \quad (5.12)$$

und können nun Satz 5.4 auf die dritte Komponente H_3 wie in (5.12) gegeben anwenden und erhalten das folgende Korollar.

Korollar 5.6 *Aus der Kenntnis der dritten Komponente $H_3(x)$ für $x \in \Omega_e$ können wir eindeutig die jeweils dritten Komponenten $H_3^{(1)}(x)$ und $H_3^{(2)}(x)$ mit den Platten Γ_1 und Γ_2 des Einschicht-Systems als Träger identifizieren.*

Mit Korollar 5.5 überträgt sich dieses Resultat auch auf das Mehrschicht-System.

5.3 Eindeutigkeit für Stromrekonstruktionen in Oberflächen

Unter bestimmten Bedingungen kann aus dem Magnetfeld, das von den Strömen in einer Ebene $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ erzeugt wird, eben dieser Strom eindeutig rekonstruiert werden.

Satz 5.7 *Betrachte das Magnetfeld einer stetigen, beschränkten Stromdichte j in einer Ebene $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ und einen Punkt $\tilde{x} \in \Gamma$. Dabei bezeichnen wir den Einheitsnormalenvektor an Γ mit $\nu = (0, 0, 1)^T$. Dann haben wir das Verhalten*

$$\lim_{x \rightarrow \tilde{x}} H(x) \times \nu = \frac{1}{2} \tilde{j}(\tilde{x}),$$

wobei $\tilde{j}$ die erweiterte Stromverteilung

$$\tilde{j}(y) := \begin{pmatrix} j_1(y) \\ j_2(y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

bezeichnet.

BEWEIS. Wir verwenden die Sprungbeziehung für die Rotation eines Vektorpotentials aus Satz 2.36 und berechnen

$$\begin{aligned} H(\tilde{x}) \times \nu &= \int_{\Gamma} \operatorname{curl}_{\tilde{x}} \{ \tilde{j}(y) \Phi(\tilde{x}, y) \} \times \nu(\tilde{x}) ds(y) + \frac{1}{2} \tilde{j}(\tilde{x}) \\ &= \int_{\Gamma} \operatorname{curl}_{\tilde{x}} \left\{ \begin{pmatrix} j_1(y) \\ j_2(y) \\ 0 \end{pmatrix} \Phi(\tilde{x}, y) \right\} \times \nu(\tilde{x}) ds(y) + \frac{1}{2} \tilde{j}(\tilde{x}) \\ &= \int_{\Gamma} \operatorname{curl}_{\tilde{x}} \left\{ \begin{pmatrix} j_1(y) \Phi(\tilde{x}, y) \\ j_2(y) \Phi(\tilde{x}, y) \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \times \nu(\tilde{x}) ds(y) + \frac{1}{2} \tilde{j}(\tilde{x}) \\ &= \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} -\frac{\partial \Phi(\tilde{x}, y)}{\partial \tilde{x}_3} j_2(y) \\ \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, y)}{\partial \tilde{x}_3} j_1(y) \\ \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, y)}{\partial \tilde{x}_1} j_2(y) - \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, y)}{\partial \tilde{x}_2} j_1(y) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ds(y) + \frac{1}{2} \tilde{j}(\tilde{x}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, y)}{\partial \tilde{x}_3} j_1(y) \\ \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, y)}{\partial \tilde{x}_3} j_2(y) \\ 0 \end{pmatrix} ds(y) + \frac{1}{2} \tilde{j}(\tilde{x}) \\
&= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{x}_3 - y_3}{|\tilde{x} - y|^3} \begin{pmatrix} j_1(y) \\ j_2(y) \\ 0 \end{pmatrix} dy_1 dy_2 + \frac{1}{2} \tilde{j}(\tilde{x}) \\
&= \frac{1}{2} \tilde{j}(\tilde{x}),
\end{aligned}$$

da $tx_3 = y_3$. □

Hier sehen wir, dass es für die eindeutige Rekonstruktion notwendig ist, H_1 und H_2 mit Träger Γ zu kennen. Daher ist ein Splitting von H_3 wie in Satz 5.4 nicht ausreichend, um j zu bestimmen.

5.4 Nullraumäquivalenz

In Abschnitt 5.2 haben wir gezeigt, dass wir die H_3 -Komponente des Magnetfelds eindeutig in Teilfelder aufspalten können, die von Strömen in Γ_1 und Γ_2 erzeugt werden. Abschnitt 5.3 hat gezeigt, dass es nur möglich ist, den Strom eindeutig zu rekonstruieren, wenn H_1 und H_2 bekannt sind. In diesem Abschnitt präsentieren wir daher Äquivalenzaussagen über die Nullräume des Biot-Savart-Operators auf dem ganzen Gebiet und auf den Platten. Zuerst beweisen wir den Fall für das Einsicht-System und verallgemeinern dann auf das Mehrschicht-System.

Definition 5.8 Sei $j^{(k)}$ eine nicht notwendigerweise divergenzfreie Stromverteilung in Γ_k . Dann wird durch $W_3^{(k)} : L^2(\Gamma_k) \rightarrow H^1(\Omega_e)$ mit

$$(W_3^{(k)} j^{(k)})(x) := \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_k} \frac{(x_1 - y_1) j_2^{(k)}(y) - (x_2 - y_2) j_1^{(k)}(y)}{|x - y|^3} dy, \quad x \in \Omega_e$$

der *reduzierte Biot-Savart-Operator* definiert, der eine Stromverteilung in Γ_k auf die dritte Komponente ihres Magnetfelds abbildet.

Wenn wir eine divergenzfreie Stromverteilung vorliegen haben, dann können aus der Kenntnis der Normalenrichtung des Magnetfelds auf ∂G alle drei Komponenten bestimmt werden, wie wir im Folgenden zeigen.

Satz 5.9 (Eindeutigkeit für das Randwertproblem) *Sei H ein Magnetfeld, das durch eine divergenzfreie Stromdichte j in einer beschränkten Menge Ω erzeugt wird und sei U ein Halbraum, der $\overline{\Omega}$ in seinem offenen Äußeren enthält. Wir bezeichnen den Normalenvektor an den Rand ∂U von U mit ν . Dann bestimmt $\nu \cdot H$ auf ∂U das Magnetfeld H eindeutig in Ω_e .*

BEWEIS. Aufgrund der Divergenzfreiheit von j folgt aus den Maxwell-Gleichungen, dass H die Bedingung $\text{curl } H = 0$ in Ω_e erfüllt. Nach Korollar 2.38 existiert ein magnetisches Potential $\varphi_H \in H^1(\Omega_e)$ mit

$$H = \text{grad } \varphi_H \quad \text{in } \Omega_e. \quad (5.13)$$

Es ist eindeutig bis auf eine Konstante, die wir im Folgenden bestimmen werden.

Da H ein Rotationsfeld ist, gilt in Ω_e

$$\text{div } H = 0$$

und mit $\text{div grad} = \Delta$ erhalten wir aus (5.13) die Laplace-Gleichung

$$\Delta \varphi_H = 0 \quad \text{in } \Omega_e$$

für φ_H . Auf ∂U ist $g := \nu \cdot H$ gegeben, also erhalten wir durch

$$g = \nu \cdot H = \nu \cdot \text{grad } \varphi_H = \frac{\partial \varphi_H}{\partial \nu}$$

eine Neumann-Randbedingung für φ_H auf ∂U . Da H durch eine Stromverteilung in Ω erzeugt wird, kann H durch das Biot-Savart-Gesetz dargestellt werden und wir erhalten nach (2.30) die Abfallrate

$$\|H(x)\| \leq \frac{C}{r^2}, \quad \|x\| = r \rightarrow \infty. \quad (5.14)$$

Es ist ausreichend, das Abklingen von φ_H außerhalb der Kugel $B_R(0)$ mit $\Omega \subset B_R(0)$ abzuschätzen. Wir wählen die Konstante für das magnetische Potential nun so, dass φ_H gleich Null ist im Punkt $(-\infty, 0, 0)$. Dann berechnen wir φ_H bei $x_T = (-T, 0, 0)$ durch

$$\varphi_H(x_T) = \int_{-\infty}^{-T} H_1(y_1) dy_1$$

und schätzen ab

$$|\varphi_H(x_T)| = \left| \int_{-\infty}^{-T} H_1(y_1) dy_1 \right| \leq \left| \int_{-\infty}^{-T} \frac{C}{t^2} dt \right| = \frac{C}{T}.$$

Um das Potential in anderen Punkten $x \in \mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)$ mit $r = \|x\|$ zu erhalten, integrieren wir zuerst von $(-\infty, 0, 0)$ bis $(-r, 0, 0)$ und dann entlang eines Kreises mit Radius r um den Ursprung, der $(-r, 0, 0)$ mit x verbindet. Wir schätzen mit einer Parametrisierung τ des Kreises mit Radius r um den Ursprung ab und erhalten

$$\begin{aligned} |\varphi_H(x)| &\leq \frac{C}{r} + \left| \int_0^\alpha \tau(\xi) \cdot H(\tau(\xi)) r d\xi \right| \\ &\leq \frac{C}{r} + \frac{\tilde{C}\alpha r}{r^2} \leq \frac{C + 2\pi}{r} \end{aligned}$$

mit allgemeinen Konstanten C und $\tilde{C}$. Dies beweist die Abschätzung

$$|\varphi_H(x)| \leq \frac{C}{r}, \quad r = \|x\| \rightarrow \infty$$

gleichmäßig für alle Richtungen.

Wir sammeln nun alle Teile, um die Eindeutigkeit für das Randwertproblem zu beweisen. Angenommen, es gäbe zwei Magnetfelder H und $\tilde{H}$ mit identischen Randwerten

$$\nu \cdot H = \nu \cdot \tilde{H} \quad \text{auf } \partial U.$$

Dann gilt für die Differenz der beiden Felder $\hat{H} := H - \tilde{H} = 0$ auf ∂U und $\hat{H}$ erfüllt die Abfallbedingung (5.14). Daher löst das magnetische Potential für $\hat{H}$ das Neumann-Problem mit homogenen Randwerten, es verschwindet nach Satz 2.19 in U und es gilt $H = \tilde{H}$ in U . Wegen der Analytizität der Felder in Ω_e stimmen sie in Ω_e überein und der Beweis ist vollständig. $\square$

Nun sind wir in der Lage, Nullraumelemente von W aus denen von $W_3^{(1)}$ zu konstruieren.

Lemma 5.10 *Sei auf Γ_1 eine Stromverteilung $j^{(1)}$ gegeben, für die $W_3^{(1)} j^{(1)} = 0$ in Ω_e gilt. Dann können wir eine Stromverteilung j auf Ω mit $j^{(1)} = j|_{\Gamma_1}$ konstruieren, so dass $\operatorname{div} j = 0$ und $Wj = 0$ in Ω_e gilt.*

BEWEIS. Wir definieren

$$j^{(\Lambda)}(y) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \text{Div } j^{(1)}(y_1, y_2, c_1) \end{pmatrix}$$

mit der Oberflächendivergenz Div auf Γ_1 und setzen $j^{(2)}(y_1, y_2, c_2) := -j^{(1)}(y_1, y_2, c_1)$. Das definiert eine Stromverteilung j auf Ω , die nach Konstruktion divergenzfrei ist, da

$$\frac{\partial j_3^{(\Lambda)}(y)}{\partial y_3} = 0$$

ist und somit

$$\text{div } j^{(\Lambda)} = 0$$

erfüllt ist. Aus Symmetriegründen ist

$$W_3^{(2)} j^{(2)} = -W_3^{(1)} j^{(1)} = 0$$

und darüber hinaus hat das von $j^{(\Lambda)}$ erzeugte Magnetfeld nach (5.11) ebenfalls eine verschwindende dritte Komponente. Daher haben wir $H_3 = 0$ in Ω_e und wir wählen einen Halbraum U so, dass ∂U parallel zu Γ_1 und Γ_2 und $\Omega \subset \mathbb{R} \setminus \bar{U}$ ist. Daher ist $H_3 = \nu \cdot H$. Aus Satz 5.9 folgt nun $Wj = 0$. $\square$

Nun zeigen wir, dass es für Elemente aus $N(W_3^{(k)})$ notwendig und hinreichend ist, dass die Tangentialkomponente auf dem Rand von Γ_k verschwindet.

Lemma 5.11 *Sei $j^{(k)}$ eine Stromverteilung auf $\Gamma_k, k = 1, 2$, die Gradient eines skalaren Potentials $\psi^{(k)}$ ist. Dann ist $W_3^{(k)} j^{(k)} = 0$ in Ω_e genau dann, wenn $\tau(y) \cdot j^{(k)}(y) = 0$ für alle $y \in \partial\Gamma_k$, wobei $\partial\Gamma_k$ den eindimensionalen Rand der Oberfläche Γ_k und τ den Einheitstangentenvektor an $\partial\Gamma_k$ bezeichnet.*

BEWEIS. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir Γ_1 . Sei $j^{(1)} \in C^1(\Gamma_1)$. Wir nehmen zuerst an, dass $\tau(y) \cdot j^{(1)}(y) = 0$ für alle $y \in \partial\Gamma_1$. Dann berechnen wir mit Hilfe von

$$\text{curl}_y \left\{ \Phi(x, y) j^{(1)}(y) \right\} = \Phi(x, y) \text{curl } j^{(1)}(y) + \left(\text{grad}_y \Phi(x, y) \right) \times j^{(1)}(y)$$

und des Stokes'schen Satzes 2.40 für $x \in \Omega_e$

$$\begin{aligned}
(W_3^{(1)}j^{(1)})(x) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{(x_1 - y_1)j_2^{(1)}(y) - (x_2 - y_2)j_1^{(1)}(y)}{|x - y|^3} ds(y) \\
&= \int_{\Gamma_1} \left[\left(\operatorname{grad}_x \Phi(x, y) \right) \times j^{(1)}(y) \right] \cdot \nu(y) ds(y) \\
&= \int_{\Gamma_1} \left[\left(-\operatorname{grad}_y \Phi(x, y) \right) \times j^{(1)}(y) \right] \cdot \nu(y) ds(y) \\
&= \int_{\Gamma_1} \left[-\operatorname{curl}_y \left\{ \Phi(x, y) j^{(1)}(y) \right\} + \Phi(x, y) \operatorname{curl} j^{(1)}(y) \right] \cdot \nu(y) ds(y) \\
&= - \int_{\partial\Gamma_1} \Phi(x, y) \tau(y) \cdot j^{(1)}(y) d\gamma(y) \\
&\quad + \int_{\Gamma_1} \Phi(x, y) \operatorname{curl} j^{(1)}(y) \cdot \nu(y) ds(y) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

wobei wir die Voraussetzung $\tau \cdot j^{(1)} = 0$ auf $\partial\Gamma_1$ und die Eigenschaft, dass ein Gradientenfeld rotationsfrei ist, verwendet haben.

Sei nun $W_3^{(1)}j^{(1)} = 0$ in Ω_e . Dann haben wir für $x \in \Omega_e$ wie oben

$$\begin{aligned}
0 &= (W_3^{(1)}j^{(1)})(x) \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{(x_1 - y_1)j_2^{(1)}(y) - (x_2 - y_2)j_1^{(1)}(y)}{|x - y|^3} ds(y) \\
&= - \int_{\partial\Gamma_1} \Phi(x, y) \tau(y) \cdot j^{(1)}(y) d\gamma(y). \tag{5.15}
\end{aligned}$$

Wir zeigen im Folgenden, dass das Integral in (5.15) für $x \rightarrow \partial\Gamma_1$ eine logarithmische Singularität hat. Wir gehen dabei ähnlich wie in [HKP05] vor. Dabei ergibt sich (5.15) zu

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\partial\Gamma_{1,i}} \Phi(x, y) j_1^{(1)}(y) d\gamma(y) + \sum_{i=3}^4 \int_{\partial\Gamma_{1,i}} \Phi(x, y) j_2^{(1)}(y) d\gamma(y) = 0,$$

wobei $\partial\Gamma_{1,1}$ und $\partial\Gamma_{1,2}$ die beiden Randstücke von $\partial\Gamma_1$ in x_1 -Richtung und $\partial\Gamma_{1,3}$ und $\partial\Gamma_{1,4}$ die beiden Randstücke in x_2 -Richtung bezeichnen. Sei nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit den Bezeichnungen aus (5.1) $z_0 := (a_0, -b, c_1)^T$ mit $-a < a_0 < a$ ein Punkt auf $\partial\Gamma_{1,1}$. Dann gilt für

$z_h := z_0 - (0, 0, h)^T$ mit $h > 0$ und $y_t := (t, -b, c_1)^T$

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial\Gamma_{1,1}} \Phi(z_h, y) j_1^{(1)}(y) d\gamma(y) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{1}{|z_h - y_t|} j_1^{(1)}(y_t) dt \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{1}{\sqrt{(a_0 - t)^2 + h^2}} j_1^{(1)}(y_t) dt \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{1}{\sqrt{(a_0 - t)^2 + h^2}} \left(j_1^{(1)}(y_t) - j_1^{(1)}(z_0) \right) dt \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{1}{\sqrt{(a_0 - t)^2 + h^2}} j_1^{(1)}(z_0) dt.
 \end{aligned}$$

Das erste Integral ist hierbei für $h \rightarrow 0$ beschränkt und für das zweite Integral berechnen wir:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{1}{\sqrt{(a_0 - t)^2 + h^2}} j_1^{(1)}(z_0) dt &= \frac{j_1^{(1)}(z_0)}{4\pi} \left[\ln \left(a - a_0 + \sqrt{(a - a_0)^2 + h^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \ln \left(-a - a_0 + \sqrt{(a + a_0)^2 + h^2} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Für $h \rightarrow 0$ hat das Integral also eine logarithmische Singularität. Analoge Überlegungen gelten auch für die Integrale über die restlichen Randstücke. In einer Umgebung von Γ_1 gilt nach Voraussetzung $W_3^{(1)} j^{(1)} = 0$. Daher erhalten wir $\tau(y) \cdot j^{(1)}(y) = 0$ für alle $y \in \partial\Gamma_1$. Der Fall $j^{(1)} \in H^1(\Gamma_1)$ wird durch Kontinuitätsargumente erlangt. $\square$

Das analoge Resultat gilt natürlich auch für Γ_2 .

Da das elektrische Feld E rotationsfrei ist, kann es nach Korollar 2.38 als Gradient eines Skalarpotentials dargestellt werden. Das elektrische Feld und die Stromverteilung sind über das Ohm'sche Gesetz (2.19) miteinander verbunden. Daher sind hier besonders Stromdichten interessant, die als Gradient eines Skalarpotentials dargestellt werden können. Wenn wir also die Situation betrachten, in der $j^{(2)} = \text{Grad } \psi^{(2)}$ gilt und die Leitfähigkeit σ in Γ_2 konstant ist, erhalten wir in Verbindung mit $j_3^{(\Lambda)} = -\text{Div } j^{(2)}$ und $\Delta_2 := \text{Div Grad}$ die Poisson-Gleichung

$$\Delta_2 \psi^{(2)} = -j_3^{(\Lambda)} \quad \text{auf } \Gamma_2 \quad (5.16)$$

mit dem zweidimensionalen Laplace-Operator Δ_2 . Falls wir $\psi^{(2)}|_{\partial\Gamma_2}$ als konstant voraussetzen, ist die Stromverteilung $j^{(2)}$ eindeutig durch j_3 bestimmt.

Denn wenn wir zwei Lösungen $\psi^{(2)}$ und $\tilde{\psi}^{(2)}$ von (5.16) nehmen, dann löst ihre Differenz $\hat{\psi}^{(2)} := \psi^{(2)} - \tilde{\psi}^{(2)}$ die Laplace-Gleichung mit konstanten Dirichlet-Randwerten auf Γ_1 . Aus dem Maximum-Minimum-Prinzip aus Satz 2.16 folgt nun, dass $\hat{\psi}^{(2)}$ konstant ist, damit also die Differenz der zugehörigen Ströme Null ist.

Bemerkung 5.12 Falls $j^{(k)}$ der Gradient eines Skalarpotentials $\psi^{(k)}$ ist, ist die Bedingung $\tau(y) \cdot j^{(k)}(y) = 0$ für alle $y \in \partial\Gamma_k$ äquivalent zu der Bedingung, dass die Tangentialableitungen von $\psi^{(k)}$ auf $\partial\Gamma_k$ verschwinden, $\psi^{(k)}$ also auf $\partial\Gamma_k$ konstant ist.

Wir reduzieren nun die Untersuchung des Nullraums von W auf die Untersuchung des Nullraums von $W_3^{(k)}$.

Satz 5.13 (Nullraumäquivalenz für das Einschicht-System) *Wir betrachten ein Setup wie in Definition 5.1 mit einer divergenzfreien Stromverteilung j , so dass $j^{(k)}$ der Gradient eines skalaren Potentials $\psi^{(k)}$ für $k = 1, 2$ ist. Dann gilt $Wj = 0$ genau dann, wenn $W_3^{(k)}j^{(k)} = 0$, $k = 1, 2$. Darüber hinaus existiert zu jedem Element $j^{(1)} \in N(W_3^{(1)})$ genau ein Element $j \in N(W)$ mit $j|_{\Gamma_1} = j^{(1)}$.*

BEWEIS. Sei ein Element $j^{(1)} \in N(W_3^{(1)})$ gegeben. In Lemma 5.10 haben wir bereits ein Element $j \in N(W)$ mit $j|_{\Gamma_1} = j^{(1)}$ konstruiert.

Sei nun umgekehrt $j \in N(W)$. Dann verschwindet trivialerweise die dritte Komponente von Wj und wir erhalten

$$W_3^{(1)}j^{(1)} + W_3^{(2)}j^{(2)} = 0 \quad \text{in } \Omega_e$$

für $j^{(k)} = j|_{\Gamma_k}$, $k = 1, 2$. Aus der Eindeutigkeit des Splittings aus Satz 5.4 folgt nun

$$W_3^{(1)}j^{(1)} = W_3^{(2)}j^{(2)} = 0 \quad \text{in } \Omega_e,$$

wobei $j^{(2)}$ eindeutig durch die Bedingungen (5.6), (5.7) und die Poisson-Gleichung (5.16) aus dem Nullraumelement $j^{(1)}$ bestimmt wird. $\square$

Nun erweitern wir dieses Resultat auf das Mehrschicht-System, gegeben durch Definition 5.2 mit n Schichten und damit $n + 1$ Platten. Dann können wir das Gesamtmagnetfeld analog zu (5.10) aufspalten. Für $k = 1, \dots, n + 1$ bezeichnen wir das Magnetfeld, das von Strömen $j^{(k)}$ in Γ_k erzeugt wird, mit $H^{(k)}$ und für $l = 1, \dots, n$ bezeichnen wir das Magnetfeld, das von Strömen $j^{(\Lambda_l)}$ in Λ_l erzeugt wird, mit $H^{(\Lambda_l)}$.

Satz 5.14 (Nullraumäquivalenz für das Mehrschicht-System) *Wir betrachten ein Setup wie in Definition 5.2 mit einer divergenzfreien Stromverteilung j , so dass $j^{(k)}$ der Gradient eines skalaren Potentials $\psi^{(k)}$ für $k = 1, \dots, n+1$ ist. Dann gilt $Wj = 0$ genau dann, wenn $W_3^{(k)}j^{(k)} = 0$, $k = 1, \dots, n+1$. Darüber hinaus existiert zu den Elementen $j^{(k)} \in N(W_3^{(k)})$, $k = 1, \dots, n+1$ genau ein Element $j \in N(W)$ mit $j|_{\Gamma_k} = j^{(k)}$.*

BEWEIS. Wir müssen sorgfältig prüfen, welche Argumente sich vom Ein- auf das Mehrschicht-System übertragen lassen. Wir splitten nach Korollar 5.5 die dritte Komponente H_3 des Magnetfelds in

$$H_3(x) = \sum_{k=1}^{n+1} H_3^{(k)}(x), \quad x \in \Omega_e$$

als Summe von Teilfeldern, die von Strömen in den Platten Γ_k , $k = 1, \dots, n+1$ erzeugt werden.

Sei also $Wj = 0$ in Ω_e . Dann gilt insbesondere für $x \in \Omega_e$

$$\sum_{k=1}^{n+1} W_3^{(k)}(x) = 0$$

und aus der Eindeutigkeit des Splittings aus Satz 5.4 erhalten wir für $k = 1, \dots, n+1$

$$W_3^{(k)}j^{(k)} = 0 \quad \text{in } \Omega_e.$$

Sei nun umgekehrt $W_3^{(k)}j^{(k)} = 0$ für $k = 1, \dots, n+1$. Jede Menge von Nullraumelementen $j^{(k)}$ bestimmt nun ein Element j durch schrittweises Anwenden der Poisson-Gleichung wie in (5.16). Zuerst kann aus $j^{(1)}$ die Stromverteilung $j^{(\Lambda_1)}$ in der ersten Schicht und dann aus $j^{(2)}$ und $j^{(\Lambda_1)}$ die Stromverteilung $j^{(\Lambda_2)}$ bestimmt werden. Dieses Verfahren wird dann iterativ fortgesetzt, wobei analog zum Beweis für den Fall des Einschicht-Systems in Satz 5.13 $j^{(n+1)}$ eindeutig durch die anderen Stromverteilungen bestimmt wird. $\square$

Damit ist gezeigt, dass sowohl für das Ein- als auch für das Mehrschicht-System die Nullräume des reduzierten und des vollen Problems bijektiv aufeinander abgebildet werden können. Dieses Resultat ist die Grundlage für den *Peeling-Algorithmus*, den wir in Kapitel 6 entwickeln.

5.5 Beispiel eines Nullraumelements für das Einschicht-System

Wir schließen dieses Kapitel, indem wir basierend auf Bemerkung 5.12 exemplarisch ein Nullraumelement für das Einschicht-System konstruieren.

Wir betrachten

$$\Gamma_1 := \left\{ (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_1, x_2 \leq \pi \right\}$$

$$\Gamma_2 := \left\{ (x_1, x_2, 1) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_1, x_2 \leq \pi \right\}$$

und

$$\Lambda := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_1, x_2 \leq \pi, 0 < x_3 < 1 \right\}.$$

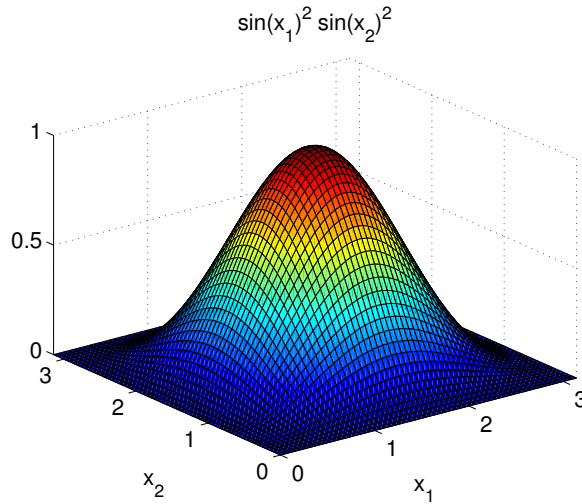


Abbildung 5.3: Potential $\psi^{(1)}$ aus (5.17)

Dann erfüllt das Potential

$$\psi^{(1)}(y) := \sin^2(y_1) \sin^2(y_2) \quad y \in \Gamma_1 \tag{5.17}$$

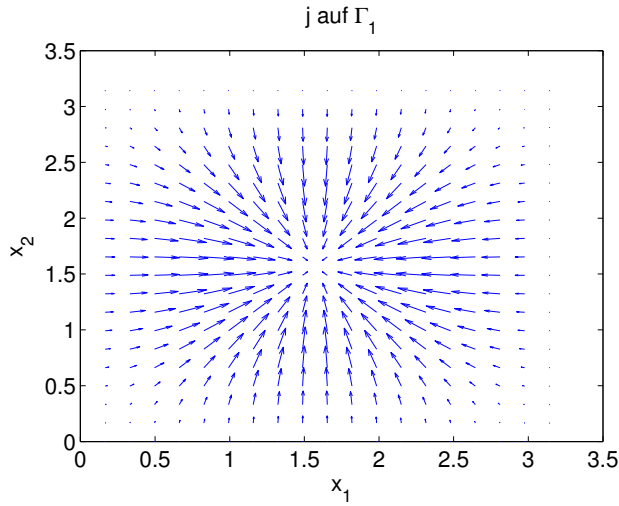


Abbildung 5.4: Aus dem Potential (5.17) resultierende Stromverteilung (5.18) als Vektorplot auf Γ_1

die Bedingung aus Bemerkung 5.12, es gilt sogar $\psi^{(1)} = 0$ auf $\partial\Gamma_1$. Abbildung 5.3 visualisiert das Potential $\psi^{(1)}$.

Abbildung 5.4 zeigt die aus $\psi^{(1)}$ abgeleitete Stromverteilung

$$j^{(1)}(y) = \text{Grad } \psi^{(1)}(y) = \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \psi^{(1)} \right) = \begin{pmatrix} 2 \sin(y_1) \cos(y_1) \sin^2(y_2) \\ 2 \sin^2(y_1) \sin(y_2) \cos(y_2) \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

Das von $j^{(1)}$ in Γ_1 erzeugte Magnetfeld besitzt nach Lemma 5.11 keine H_3 -Komponente, was durch die numerische Auswertung des Biot-Savart-Operator in Abbildung 5.5 verdeutlicht wird.

Wir ergänzen nun die Stromverteilung $j^{(1)}$ in Γ_1 wie folgt zu einer Gesamtstromverteilung j . Die sich ergebende Gesamtstromverteilung j in Ω soll divergenzfrei sein, also muss sie der Kontinuitätsbedingung

$$\text{Div } j^{(1)} = j_3^{(\Lambda)}$$

zum verlustfreien Übergang von Flächen- zu Volumenstromdichte genügen. Für die hier vorliegende Stromverteilung bedeutet das

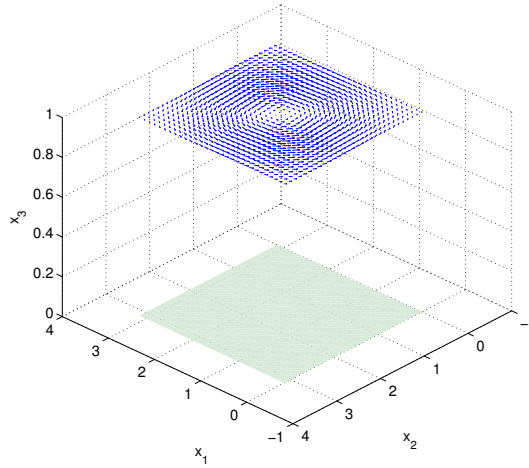


Abbildung 5.5: Magnetfeld mit verschwindender dritter Komponente, das von der Stromverteilung $j^{(1)}$ in Γ_1 (hellgrün) erzeugt wird

$$\begin{aligned}
 j^{(\Lambda)}(y) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial y_1} j_1^{(1)}(y) + \frac{\partial}{\partial y_2} j_2^{(1)}(y) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2(\cos^2(y_1) \sin^2(y_2) + \sin^2(y_1) \cos^2(y_2) - 2 \sin^2(y_1) \sin^2(y_2)) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

In Abbildung 5.6 wird diese Stromverteilung visualisiert. Wir werten den Biot-Savart-Operator numerisch aus und zeigen die Konvergenz gegen das Nullfeld in Abbildung 5.7. Aus Symmetriegründen gilt $H_2 = H_1$ und daher stellen wir nur H_1 und H_3 gegenüber. Das Magnetfeld der Ströme in Γ_1 und Γ_2 wurde mit dem Biot-Savart-Operator berechnet, wobei das Integral mit der zusammengesetzten Trapezregel mit n^2 Stützstellen für $n = 20, 30, \dots, 100$ approximiert wurde. Da der Strom in Λ in x_3 -Richtung konstant ist, wurde die Berechnung mit Hilfe von n^2 Drähten in x_3 -Richtung durchgeführt. Das von den Strömen in diesen Drähten erzeugte Magnetfeld wurde mit Hilfe von (3.4) exakt berechnet.

$$2 (\cos(x_1)^2 \sin(x_2)^2 + \sin(x_1)^2 \cos(x_2)^2 - 2 \sin(x_1)^2 \sin(x_2)^2)$$

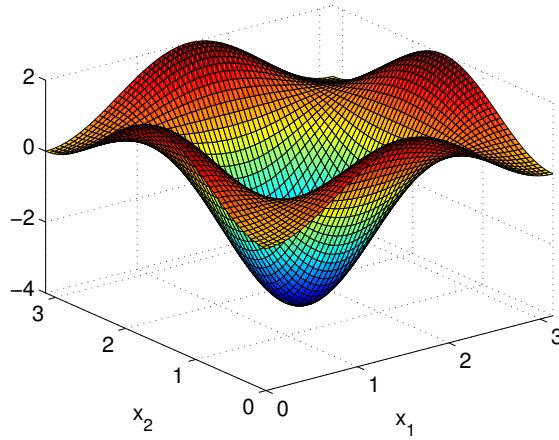


Abbildung 5.6: Stromverteilung $j_3^{(\Lambda)}$ in Λ

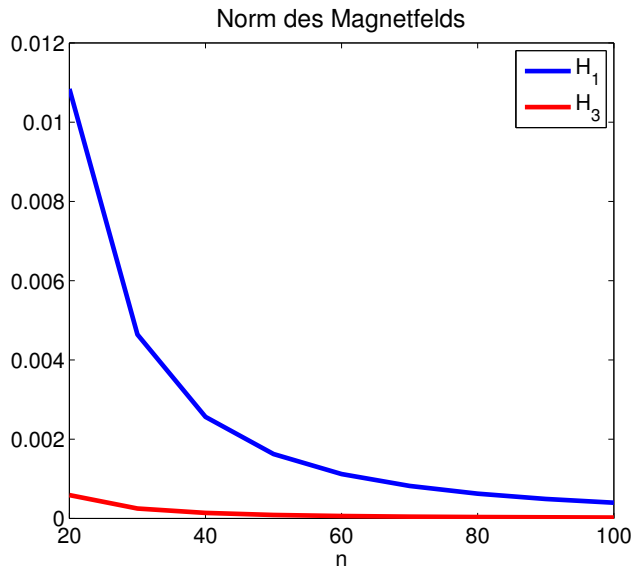


Abbildung 5.7: Konvergenz des Magnetfelds in der $\|\cdot\|_2$ -Norm bei einer Diskretisierung mit n^2 Punkten auf Γ_1 beziehungsweise Γ_2 ; Aus Symmetriegründen werden nur H_1 und H_3 miteinander verglichen.

6

Peeling-Algorithmus

In Kapitel 5 haben wir gezeigt, dass die Nullräume des vollen und des auf die Platten reduzierten Tomographieproblems äquivalent sind. In diesem Kapitel nutzen wir dieses Wissen, um einen alternativen Algorithmus zu den in Kapitel 3 vorgestellten zu entwickeln. Dieser so genannte *Peeling-Algorithmus* hat als Grundidee, dass sukzessive das Gesamtmagnetfeld basierend auf Satz 5.4 in mehrere Teilfelder aufgespalten wird. Im Einschicht-System werden dann aus dem aufgeteilten Magnetfeld die Ströme auf den Platten Γ_1 und Γ_2 berechnet und dann die Ströme in der Schicht Λ bestimmt.

Wir betrachten in diesem Kapitel wieder ein Ein- und Mehrschicht-System wie in den Definitionen 5.1 und 5.2. Wir beschränken uns zunächst aus Gründen der Einfachheit auf das Einschicht-System, erweitern dann den Algorithmus analog zum Beweis von Satz 5.14 aber auch auf das Mehrschicht-System.

In Abschnitt 6.1 spalten wir die dritte Komponente des Magnetfelds mit Hilfe eines Einfachschichtpotentialansatzes auf. Die einzelnen Teilfelder werden dabei von den Strömen in Γ_1 und Γ_2 erzeugt. Im abschließenden Abschnitt 6.2 rekonstruieren wir aus den Teilfeldern zuerst die Ströme in Γ_1 und Γ_2 und berechnen daraus anschließend die Ströme in der Schicht Λ .

6.1 Splitting des Magnetfelds

Der erste Schritt besteht darin, die dritte Komponente des Magnetfelds, die nach Korollar 5.6 nur von Strömen in Γ_1 und Γ_2 erzeugt wird, in die Summe zweier Teilfelder

$$H_3(x) = H_3^{(1)}(x) + H_3^{(2)}(x)$$

aufzuspalten.

Hierfür adaptieren wir eine in [BHLP07] entwickelte Erweiterung der Kirsch-Kress-Potential-Methode aus [CK98], die zuerst in einer Reihe von Veröffentlichungen [KK86], [KK87a] und [KK87b] vorgestellt wurde. In [BHLP07] zeigen die Autoren das Splitting eines akustischen Streufelds mit mehreren Streuobjekten.

Da nach Satz 2.43 alle Komponenten des Magnetfelds die Laplace-Gleichung erfüllen, ist die Grundidee, H_3 als Einfachschichtpotential über Oberflächen darzustellen, die Γ_k in ihrem Inneren einschließen.

Definition 6.1 Wir nehmen an, dass zwei Gebiete $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^3$ mit C^2 -glattem Randern und $\overline{D_1} \cap \overline{D_2} = \emptyset$ gegeben sind und dass Umgebungen $\tilde{D}_k$ von Γ_k mit $\tilde{D}_k \subset D_k$ für $k = 1, 2$ existieren. Wir setzen $D := D_1 \cup D_2$ und $\partial D := \partial D_1 \cup \partial D_2$. Zusätzlich gelte $\overline{D} \subset G$, wobei ∂G die Missoberfläche bezeichnet.

Wir machen also für $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D$ den Ansatz

$$\begin{aligned} H_3(x) &= \int_{\partial D} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y) \\ &= \int_{\partial D_1} \Phi(x, y) \varphi^{(1)}(y) ds(y) + \int_{\partial D_2} \Phi(x, y) \varphi^{(2)}(y) ds(y), \end{aligned}$$

wobei wir für $y \in \partial D_k$ $\varphi^{(k)}(y) := \varphi(y)$ setzen.

Wenn wir H_3 auf ∂G gegeben haben, müssen wir auf ∂G die Integralgleichung

$$(S\varphi)(x) = H_3(x) \tag{6.1}$$

mit dem Einfachschichtpotentialoperator $S: L^2(\partial D) \rightarrow L^2(\partial G)$ lösen. Wir bezeichnen mit $S^{(k)}: L^2(\partial D_k) \rightarrow L^2(\partial G)$ die Einfachschichtpotentialoperatoren

$$\left(S^{(k)} \varphi^{(k)} \right)(x) := \int_{\partial D_k} \Phi(x, y) \varphi^{(k)}(y) ds(y)$$

und erhalten dann

$$S\varphi = S^{(1)} \varphi^{(1)} + S^{(2)} \varphi^{(2)}.$$

Da ∂D und ∂G disjunkt sind, haben die Integraloperatoren stetige Kerne und die Einfachschichtpotentialoperatoren sind kompakt und damit nicht beschränkt invertierbar.

In Satz 5.4 haben wir bereits die Eindeutigkeit des Splittings gezeigt. Wenn (6.1) eindeutig lösbar ist, dann ist der Einfachschichtpotentialansatz eine konstruktive Methode, um das Magnetfeld aufzuspalten.

Satz 6.2 *Sei D wie in Definition 6.1. Dann ist der Einfachschichtpotentialoperator $S: L^2(\partial D) \rightarrow L^2(\partial G)$*

$$(S\varphi)(x) := \int_{\partial D} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial G$$

injektiv und hat dichten Wertebereich.

BEWEIS. Wir zeigen zuerst die Injektivität von S . Der Beweis verläuft analog zu dem für zusammenhängende Gebiete, siehe [Kre99, CK98].

Sei dazu $S\varphi = 0$ und definiere für $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D$ das Einfachschichtpotential

$$u(x) := u^{(1)}(x) + u^{(2)}(x)$$

mit

$$u^{(1)}(x) := \int_{\partial D_1} \Phi(x, y) \varphi^{(1)}(y) ds(y)$$

und

$$u^{(2)}(x) := \int_{\partial D_2} \Phi(x, y) \varphi^{(2)}(y) ds(y)$$

und den Dichten $\varphi^{(k)} \in L^2(\partial D_k)$ für $k = 1, 2$. Wegen $S\varphi = 0$ gilt nun $u(x) = 0$ für $x \in \partial G$, u ist harmonisch in G_e und u hat das Abfallverhalten

$$u(x) = O\left(\frac{1}{\|x\|}\right) \tag{6.2}$$

für $\|x\| \rightarrow \infty$. Daher ist u eine Lösung des homogenen äußeren Dirichlet-Problems und aus dessen eindeutiger Lösbarkeit erhalten wir $u \equiv 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus G$. Durch analytische Fortsetzung erhalten wir $u \equiv 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus D$. Wir führen die Normalableitung des Einfachschichtpotentialoperators $K' : L^2(\partial D) \rightarrow L^2(\partial D)$ durch

$$(K'\varphi)(x) := 2 \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} \varphi(y) ds(y)$$

ein und erhalten aus der Sprungbeziehung für L^2 -Dichten (2.14)

$$\varphi - K'\varphi = 0.$$

Aus Satz 6.20 in [Kre99] wissen wir, dass der Operator $I - K'$ trivialen Nullraum in $C(\partial D)$ hat. Wenden wir nun die Fredholm-Alternative (Corollary 4.16 in [Kre99]) auf das Dualsystem $\langle C(\partial D), L^2(\partial D) \rangle$ mit der L^2 -Bilinearform an, sehen wir, dass der adjungierte Operator $I - K$ trivialen Nullraum in $L^2(\partial D)$ hat. Erneutes Anwenden der Fredholm-Alternative auf das Dualsystem $\langle L^2(\partial D), L^2(\partial D) \rangle$ mit der L^2 -Bilinearform ergibt nun, dass die Nullräume von $I - K'$ in $L^2(\partial D)$ und $C(\partial D)$ übereinstimmen. Es folgt $\varphi = 0$ und damit ist S injektiv.

Für die zweite Aussage zeigen wir, dass der adjungierte Operator $S^*: L^2(\partial G) \rightarrow L^2(\partial D)$ gegeben durch

$$(S^*g)(x) := \int_{\partial G} \Phi(x, y) g(y) ds(y), \quad x \in \partial D$$

ebenfalls injektiv ist. Satz 2.24 liefert dann

$$\overline{S(L^2(\partial D))} = N(S^*)^\perp = \{0\}^\perp = L^2(\partial G).$$

Sei also $S^*g = 0$. Dann verschwindet das Einfachschichtpotential

$$v(x) := \int_{\partial G} \Phi(x, y) g(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial G$$

auf ∂D_1 und ∂D_2 . Aus der Eindeutigkeit des inneren Dirichlet-Problems folgt dann $v \equiv 0$ in D_1 und D_2 und aus der analytischen Fortsetzung erhalten wir $v \equiv 0$ in G . Mit der Normalableitung des Einfachschichtpotentialoperators $K': L^2(\partial G) \rightarrow L^2(\partial G)$

$$(K'g)(x) := 2 \int_{\partial G} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} g(y) ds(y)$$

erhalten wir aus der Sprungbeziehung für L^2 -Dichten (2.14)

$$g + K'g = 0.$$

Fasst man $I + K'$ als Abbildung von $C(\partial G)$ nach $C(\partial G)$ auf, erhält man wieder aus Satz 6.20 aus [Kre99], dass $N(I + K') = \text{span}\{\psi_0\}$ mit einer stetigen

Funktion ψ_0 , für die

$$\int_{\partial G} \psi_0 ds \neq 0$$

gilt. Mit denselben Argumenten wie oben erhalten wir, dass auch in $L^2(\partial G)$ $\dim N(I + K') = 1$ gilt. Da $\text{span}\{\psi_0\}$ in $N(I + K')$ in $L^2(\partial G)$ enthalten ist, folgt aus Dimensionsgründen, dass alle Nullraumelemente stetig sind und wir betrachten damit das klassische Randwertproblem.

Mit dem Abfallverhalten (6.2) folgt nun, dass v das homogene äußere Dirichlet-Problem in $\mathbb{R}^3 \setminus G$ löst, daher gilt $v \equiv 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus G$. Subtraktion der Sprungbeziehungen

$$\frac{\partial u_+^{(k)}}{\partial \nu}(x) = \int_{\partial G} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} ds(y) - \frac{1}{2}g(x) = 0$$

und

$$\frac{\partial u_-^{(k)}}{\partial \nu}(x) = \int_{\partial G} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} ds(y) + \frac{1}{2}g(x) = 0$$

für die Normalableitung des Einfachschichtpotentials ergibt nun $g \equiv 0$ und S^* ist ebenfalls injektiv. Die Anwendung von Satz 2.24 vollendet den Beweis. $\square$

Für ein Mehrschicht-System mit n Schichten muss der Einfachschichtpotentialoperator S aus (6.1) durch

$$(S\varphi)(x) := \sum_{k=1}^{n+1} \left(S^{(k)} \varphi^{(k)} \right)(x)$$

mit

$$\left(S^{(k)} \varphi^{(k)} \right)(x) := \int_{\partial D_k} \Phi(x, y) \varphi^{(k)}(y) ds(y)$$

ersetzt werden. Satz 6.2 gilt dann analog für $n + 1$ Gebiete.

Der Integraloperator in (6.1) hat stetigen Kern, die zugehörige Integralgleichung ist also schlecht gestellt. Wir lösen sie approximativ durch Tikhonov-Regularisierung wie in Abschnitt 2.3 beschrieben, wir approximieren (6.1) also durch die regularisierte Gleichung

$$\alpha \varphi_\alpha + S^* S \varphi_\alpha = S^* H_3 \tag{6.3}$$

mit einem Regularisierungsparameter α .

Wir lösen die Integralgleichung numerisch mit einem Kollokationsverfahren, bei dem die Oberflächen durch zwei Variablen parametrisiert und die Integrale mit der zusammengesetzten Trapezregel über jede Variable ausgewertet werden.

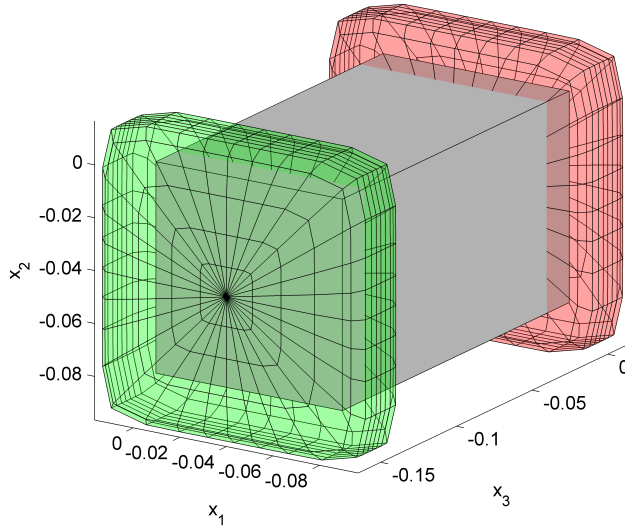


Abbildung 6.1: Ω und die beiden Potentialoberflächen ∂D_1 und ∂D_2 um die Endplatten zur Realisierung des Splittings von H_3

Da der Abstand zwischen Γ_1 und Γ_2 im Vergleich zu ihren Abmaßen im Allgemeinen relativ gering ist, kann zur Parametrisierung von ∂D_1 und ∂D_2 weder Kugel noch Ellipsoid verwendet werden. Wir parametrisieren daher den abgerundeten Quader für $r_1, r_2, r_3 > 0$ und dem Mittelpunkt $p := (p_1, p_2, p_3)^T$ durch

$$\partial D := \left\{ \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1 \cdot r(s) \cos s \cdot r(t) \sin t \\ r_2 \cdot r(s) \sin s \cdot r(t) \sin t \\ r_3 \cdot r(t) \cos t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq s < 2\pi, 0 \leq t < \pi \right\}$$

mit

$$r(t) := (\cos^q t + \sin^q t)^{\frac{1}{q}}, \quad q \in \mathbb{N}.$$

Für zwei Platten Γ_1 und Γ_2 wie in (5.1) und (5.2) zeigt Abbildung 6.1 exemplarisch das Einschicht-System Ω und die Oberflächen ∂D_1 und ∂D_2 um Γ_1 und Γ_2 für $q = 10$.

Für die numerischen Berechnungen betrachten wir Ω und die Oberflächen ∂D_1 und ∂D_2 wie in Abbildung 6.1. Das Magnetfeld ist auf einer Kugel um Ω wie in Abbildung 6.2 gegeben und wir werten das gesplittete Magnetfeld auf einem Rechteck parallel zu den Endplatten aus.

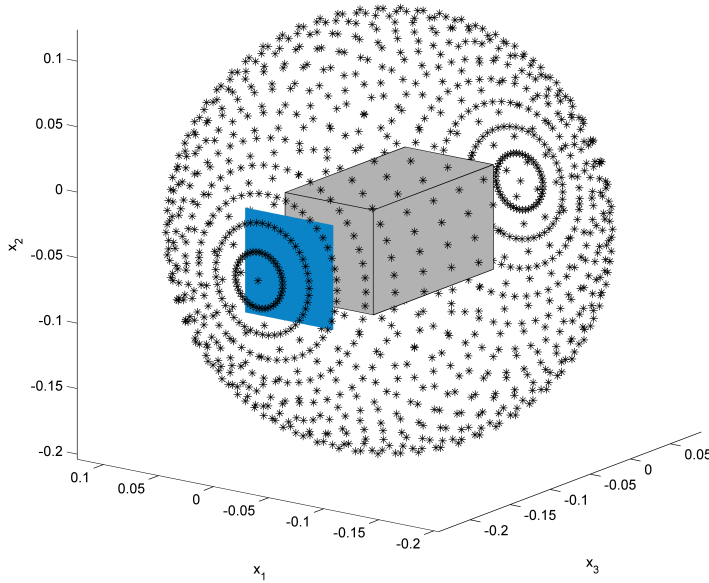


Abbildung 6.2: Ω , die diskreten Messpunkte auf ∂G und die Fläche, auf der das Magnetfeld in Abbildung 6.3 ausgewertet wird (blau)

Abbildung 6.3 zeigt jeweils für die Potentiale $u^{(1)}$ und $u^{(2)}$ das wahre und das rekonstruierte H_3 -Feld und dazu das Fehlerfeld. Die Oberflächen ∂D_1 und ∂D_2 sind mit 482 Punkten diskretisiert und das Gesamtmagnetfeld ist an 1106 Punkten gegeben. Der Regularisierungsparameter wurde aus Kenntnis der wahren Lösung optimal gewählt. Tabelle 6.1 zeigt den relativen Splitting-Fehler für $u^{(1)}$ und $u^{(2)}$ für unterschiedliche Diskretisierungslevel. Dieses Konvergenzverhalten ist zur Verdeutlichung in Abbildung 6.4 aufgetragen.

Zur Analyse des Fehlerverhaltens betrachten wir eine symmetrische Situation wie in Abbildung 6.5, bei der die beiden Potentiale $u^{(1)}$ und $u^{(2)}$ auf einem abgerundeten Quader um Ω ausgewertet werden.

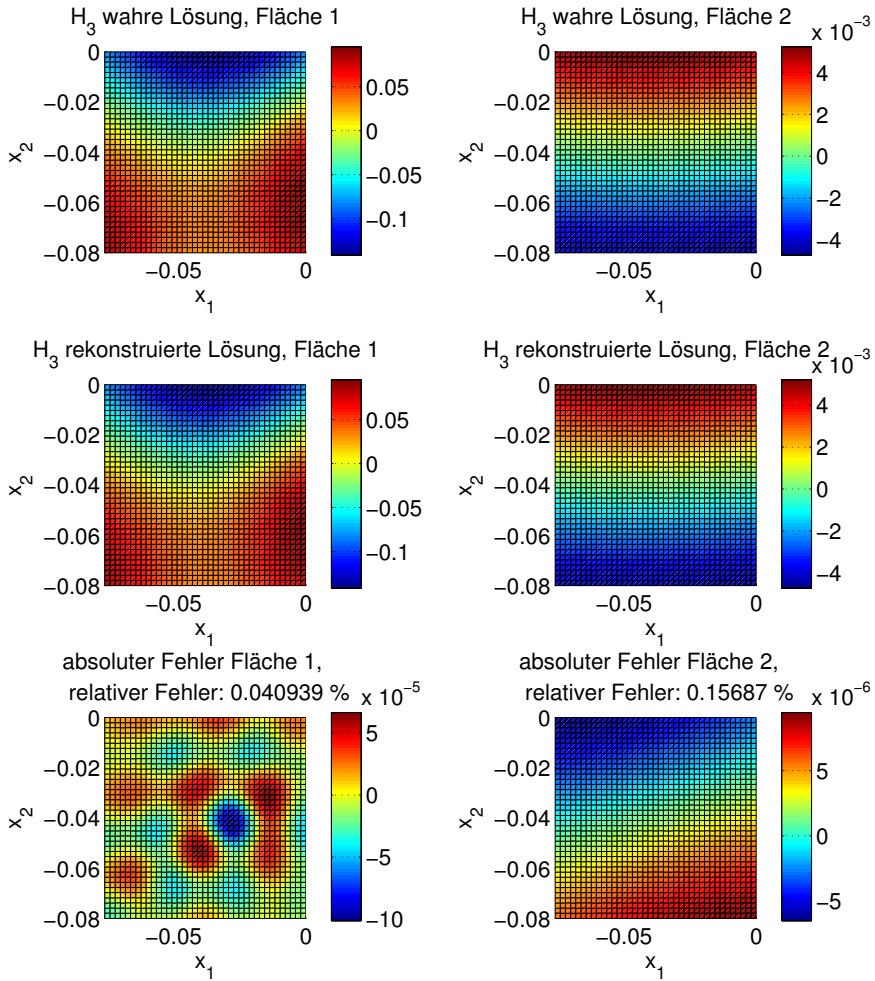


Abbildung 6.3: Gesplittete H_3 -Komponente für beide Oberflächen ∂D_1 und ∂D_2 , ausgewertet auf einer Fläche parallel zu den Endplatten (siehe Abbildung 6.2) bei optimalem Regularisierungsparameter $\alpha = 1,778279 \cdot 10^{-11}$.

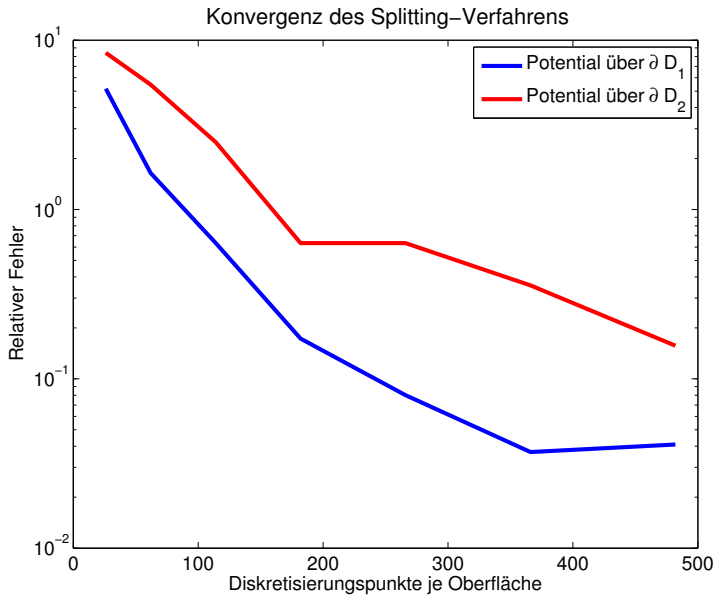


Abbildung 6.4: Relativer Splittingfehler auf der Oberfläche aus Abbildung 6.2 für die Potentiale über ∂D_1 und ∂D_2 in Abhängigkeit der Anzahl der Diskretisierungspunkte n auf jeder Oberfläche bei jeweils optimalem Regularisierungsparameter α , Darstellung der Daten aus Tabelle 6.1

Tabelle 6.1: Relativer Splittingfehler auf der Oberfläche aus Abbildung 6.2 für die Potentiale über ∂D_1 und ∂D_2 in Abhängigkeit der Anzahl der Diskretisierungspunkte n auf jeder Oberfläche bei jeweils optimalem Regularisierungsparameter α , Visualisierung der Daten in Abbildung 6.4

n	$\ H_3^{(1)} - u^{(1)}\ / \ H_3^{(1)}\ $	$\ H_3^{(2)} - u^{(2)}\ / \ H_3^{(2)}\ $
26	5,16787 %	8,41680 %
62	1,64217 %	5,46361 %
114	0,63380 %	2,49950 %
182	0,17286 %	0,63327 %
266	0,08007 %	0,63280 %
366	0,03693 %	0,35666 %
482	0,04093 %	0,06358 %

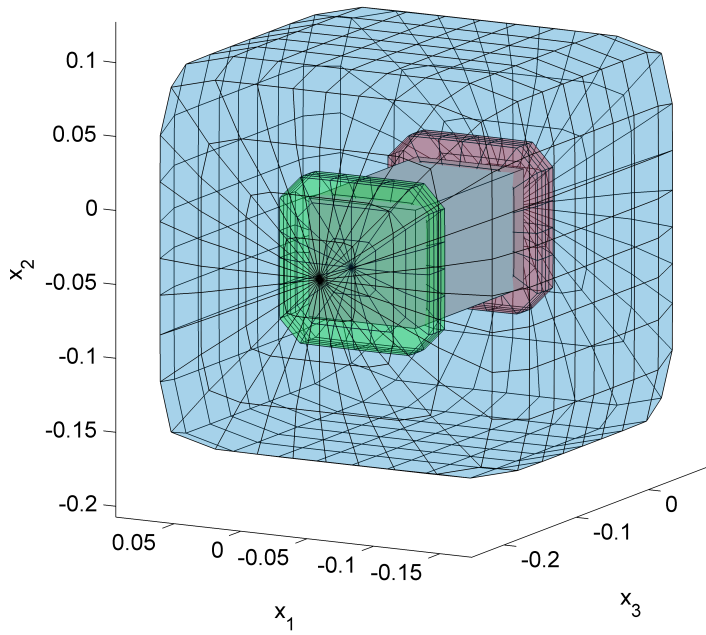


Abbildung 6.5: Potentialoberflächen (rot und grün) und Auswertungsoberfläche (blau) zur Analyse der Fehleranteile und des Gesamtfehlers in Abbildung 6.6

Abbildung 6.6 zeigt den Splitting-Fehler in den einzelnen Auswertungspunkten aufgetragen. Es wird deutlich, dass die Fehleranteile symmetrisch verteilt sind und der Gesamtfehler dadurch betragsmäßig kleiner als die Einzelfehler ist.

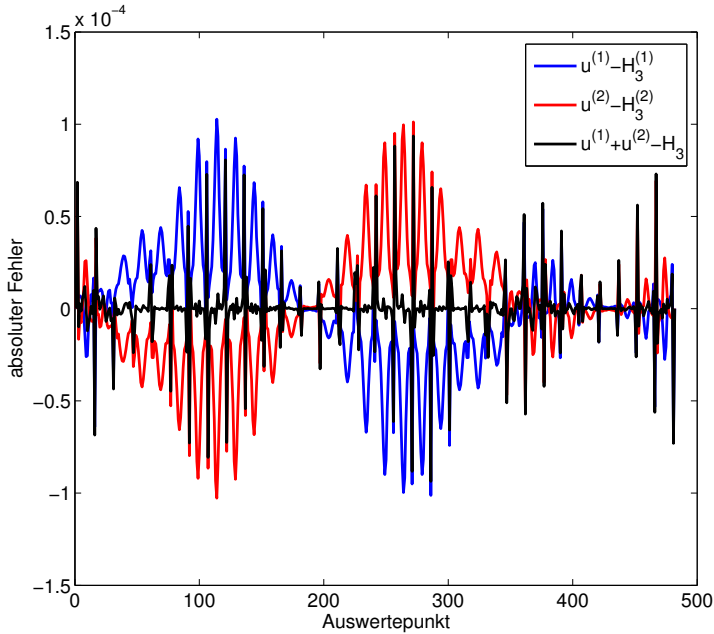


Abbildung 6.6: Fehleranteile der beiden Potentiale und Gesamtfehler für ein Setting wie in Abbildung 6.5

6.2 Der Peeling-Algorithmus

Der zweite Schritt im Peeling-Algorithmus ist die Rekonstruktion der Stromverteilung in einer Platte aus der Kenntnis der dritten Komponente des Magnetfelds. Wir erinnern daran, dass diese Stromverteilung nicht divergenzfrei ist und daher das Eindeutigkeitsresultat aus Satz 5.7 in Verbindung mit Satz 5.9 nicht anwendbar ist.

Wir verwenden ein Gitter wie in Abschnitt 3.1 beschrieben, allerdings benutzen wir zur Rekonstruktion nicht das vollständige Gitter, sondern nur eine

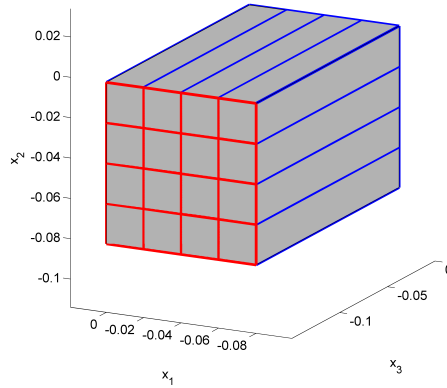


Abbildung 6.7: Gitter zur Stromrekonstruktion, für die Rekonstruktion in Γ_1 nach (6.4) wird nur der rot markierte Teil verwendet

zweidimensionale Variante wie in Abbildung 6.7. Analog zu (3.3) stellen wir den diskretisierten reduzierten Biot-Savart-Operator auf

$$\mathbf{W}_3^{(1)} \mathbf{J}^{(1)} := \frac{1}{4\pi} \sum_{\text{Drähte } l} \int_l \frac{\tilde{J}_l \times (x - p)}{|x - p|^3} ds(p).$$

Dabei wird über alle Drähte summiert, die in Γ_1 liegen. Anschließend wird die Gleichung

$$\mathbf{W}_3^{(1)} \mathbf{J}^{(1)} = \mathbf{H}_3^{(1)} \quad (6.4)$$

wieder mit Tikhonov-Regularisierung gelöst. Die Ströme in Γ_1 bilden kein geschlossenes System und sind daher nicht divergenzfrei. Daher können die alternativen Algorithmen aus Kapitel 3 nicht zur Anwendung kommen und wir sind hier auf die klassische Tikhonov-Regularisierung beschränkt. Aus den Strömen in Γ_1 können aus den Knotenregeln aus (3.2) die Ströme in Λ bestimmt werden.

Abbildung 6.8 zeigt einen Vergleich der wahren und der rekonstruierten Stromverteilung in Λ . Zur Rekonstruktion der Ströme in Γ_1 wurde ein optimaler Regularisierungsparameter $\alpha = 0.1$ verwendet, der aus Kenntnis der wahren Lösung bestimmt wurde.

In Abbildung 6.9 vergleichen wir eine Rekonstruktion mit dem Peeling-Algorithmus mit einer Rekonstruktion mit den Algorithmen aus Kapitel 3, die das vollständige Gitter nutzen. Exemplarisch verwenden wir hier die di-

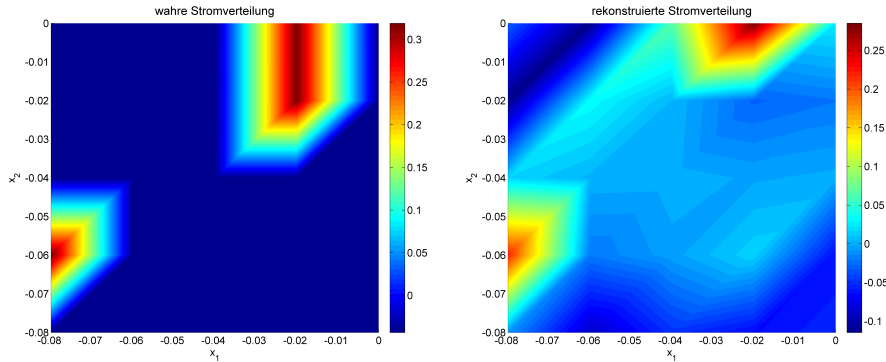


Abbildung 6.8: Wahre Stromverteilung (links) und mit dem Peeling-Algorithmus rekonstruierte Stromverteilung (rechts) in Δ

vergenzfreie Tikhonov-Regularisierung als Vergleichsmethode. Die zugrunde liegende simulierte Stromverteilung ist die aus Abbildung 6.8 und das simulierte Magnetfeld wird mit einem zufälligen gleichverteilten relativen Fehler von 2 % der Magnetfeldstärke beaufschlagt. Der Regularisierungsparameter wird jeweils optimal aus Kenntnis der wahren Lösung gewählt und liegt beim Peeling-Algorithmus bei $\alpha = 0,52983177$ und bei der divergenzfreien Tikhonov-Regularisierung bei $\alpha = 1,487352 \cdot 10^{-5}$.

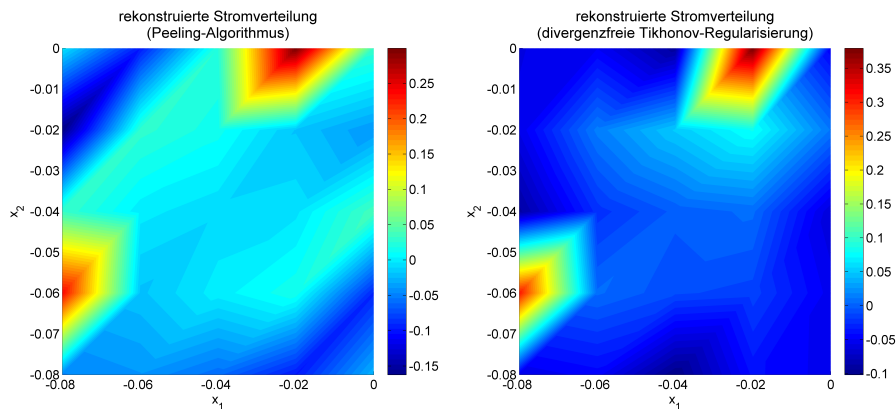


Abbildung 6.9: Vergleich einer Rekonstruktion mit Peeling-Algorithmus und divergenzfreier Tikhonov-Regularisierung bei optimal gewähltem Regularisierungsparameter α . Das Magnetfeld ist mit einem zufälligen gleichverteilten relativen Fehler von 2 % der Magnetfeldstärke gestört.

Die Abbildung zeigt geringfügig schlechtere Ergebnisse bei der Verwendung des Peeling-Algorithmus gegenüber der divergenzfreien Tikhonov-Regularisierung. Allerdings wird hierbei der Rechenaufwand erheblich reduziert, da nicht das vollständige Gitter aus Abbildung 6.7 im Speicher gehalten werden muss, sondern nur der rot markierte Teil. Dieser Vorteil kommt besonders zum Tragen, wenn die Ströme in Mehrschicht-Systemen rekonstruiert werden. Durch das vorgeschaltete Splitting des Magnetfelds ist die Rekonstruktion mit dem Peeling-Algorithmus nicht unbedingt schneller, allerdings kann aufgrund des reduzierten Gitters eine höhere räumliche Auflösung erzielt werden.

Zum Abschluss dieses Kapitels formulieren wir den Peeling-Algorithmus allgemein für ein Mehrschicht-System in Pseudocode-Notation.

Algorithmus D. Peeling-Algorithmus

function PEELINGALGORITHM(**H**)

Definiere Parametrisierungen für ∂D_k mit $\Gamma_k \subset D_k$ für $k = 1, \dots, n + 1$

Löse $\sum_{k=1}^{n+1} S^{(k)} \varphi^{(k)} = \mathbf{H}_3$ mit Tikhonov-Regularisierung

for $k = 1$ to $n + 1$ **do**

Setze $\mathbf{H}_3^{(k)}(x) := \int_{\partial D_k} \Phi(x, y) \varphi^{(k)}(y) ds(y)$

Löse $\mathbf{W}_3^{(k)} \mathbf{J}^{(k)} = \mathbf{H}_3^{(k)}$ mit Tikhonov-Regularisierung

end for

Bestimme $\mathbf{J}^{(\Lambda_1)}$ aus $\mathbf{J}^{(1)}$

for $l = 2$ to n **do**

Bestimme $\mathbf{J}^{(\Lambda_l)}$ aus $\mathbf{J}^{(\Lambda_{l-1})}$ und $\mathbf{J}^{(l)}$

end for

end function

7 **Rekonstruktionen mit einem Widerstandsnetzwerk**

In diesem Kapitel präsentieren wir den praktischen Teil dieser Arbeit. Er beinhaltet Messungen und Rekonstruktionen von Stromverteilungen in Widerstandsnetzwerken. Widerstandsnetzwerke sind die physikalische Entsprechung der Gitternetzwerke, die in Kapitel 3 eingeführt wurden. Damit können die Algorithmen direkt übertragen und getestet werden.

Die folgenden Abbildungen zeigen Rekonstruktionen von außen liegenden Fehlstellen an dem Widerstandsnetzwerk aus Abbildung 3.2. Die Messungen wurden in kontinuierlicher Fahrweise mit einer Geschwindigkeit von 50 mm/s bei einer Abtastrate von 40 Hz durchgeführt. Die Stromstärke, die durch das Widerstandsnetzwerk geleitet wurde, betrug 8 A, was einer mittleren Stromdichte von 125 mA/cm^2 in jeder der drei Ebenen entspricht. Nach der Fertigstellung des Widerstandsnetzwerks wurde mittels einer kleinen Metallhülse eine Schiebevorrichtung erstellt, um einen Widerstand stromlos zu schalten und somit eine Fehlstelle zu erzeugen (siehe Abbildung 7.1).

Das $5 \times 5 \times 3$ -Widerstandsnetzwerk hat die Abmessungen $80 \text{ mm} \times 80 \text{ mm} \times 97 \text{ mm}$ und die Zuleitungen sind mittig an der Unterseite positioniert. Die Messpunkte wurden an fünf Seiten des Quaders platziert, die Stirnseite ist bei Messungen mit Brennstoffzellen durch Zu- und Abführungen der Reaktanten nicht zugänglich. Der Messkopf wurde so nah wie möglich an das Widerstandsnetzwerk positioniert, was in einem Abstand der Messpunkte vom Widerstandsnetzwerk von ungefähr 30 mm resultiert. Der Abstand der Messpunkte wurde einheitlich über alle Achsen auf 10 mm eingestellt. In Fahrtrichtung des Sensorkopfes betrug der Abstand der Messpunkte bedingt durch die kontinuierliche Fahrweise 1,25 mm. Von den Rohdaten wurde das gleitende Mittel über je elf Messpunkte genommen, um Oszillationen zu beseitigen. Danach wurde von den Messpunkten jeder siebte ausgewählt,

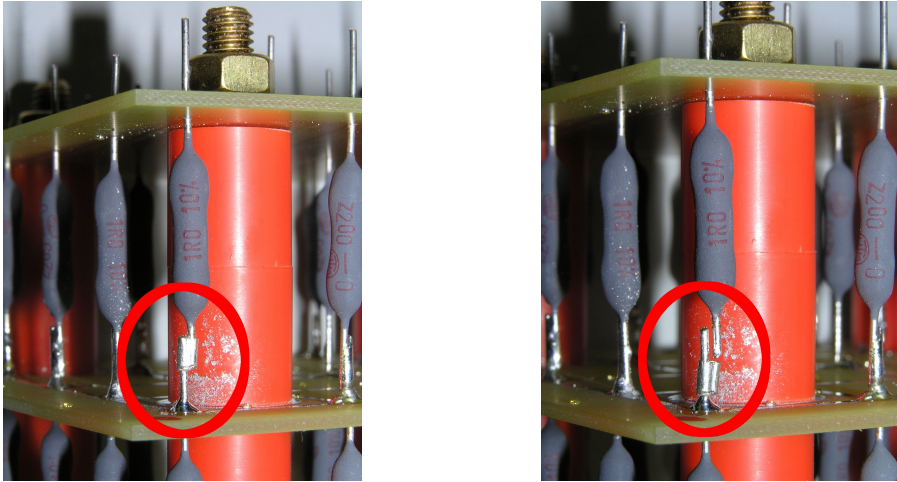


Abbildung 7.1: Schiebevorrichtung zum Stromlosschalten eines Widerstands, geschlossen (links) und geöffnet (rechts)

um die Datenmenge zu reduzieren. Abbildung 7.2 zeigt die Anordnung der Messpunkte um das Widerstandsnetzwerk.

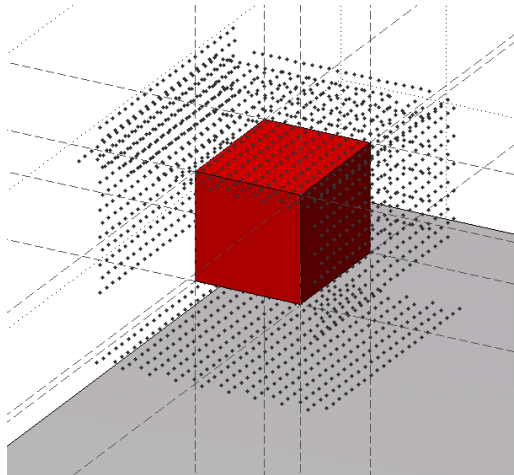


Abbildung 7.2: Verteilung der Messpunkte auf fünf Flächen um das Widerstandsnetzwerk

Abbildung 7.3 zeigt Stromdichterekonstruktionen von Differenzmessungen eines Widerstandsnetzwerks mit einer Fehlstelle. Die Fehlstelle befindet sich an der blau markierten Position in der oberen rechten Ecke der vordersten

Ebene. Es musste ein vergleichsweise großer Regularisierungsparameter von $\alpha = 6$ gewählt werden, um die in den Abbildungen 7.3 und 7.4 gezeigten Rekonstruktionen zu erhalten. Als Rekonstruktionsmethode wurde die divergenzfreie Tikhonov-Regularisierung angewendet.

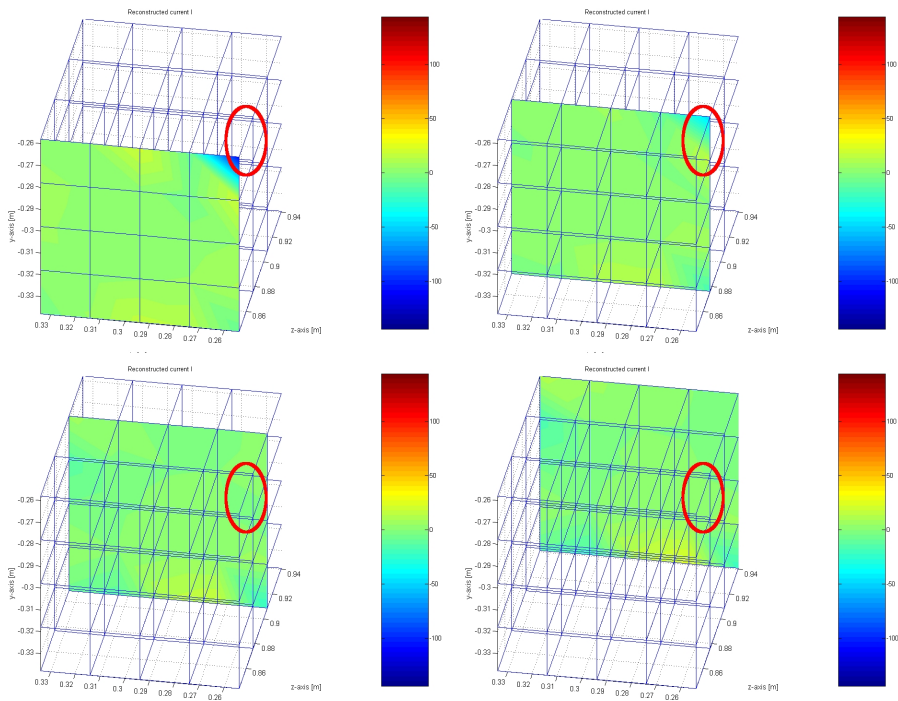


Abbildung 7.3: Stromrekonstruktionen in einem Widerstandsnetzwerk mit einer Fehlstelle (rot markiert), Schnittbilder der einzelnen Ebenen des Widerstandsnetzwerks aus Abbildung 3.2

Es ist deutlich sichtbar, dass die Fehlstelle eindeutig identifiziert wird. Abbildung 7.4 zeigt ebenfalls Rekonstruktionen eines Widerstandsnetzwerks mit außen liegender Fehlstelle, hier allerdings an der oberen linken Ecke der vordersten Ebene.

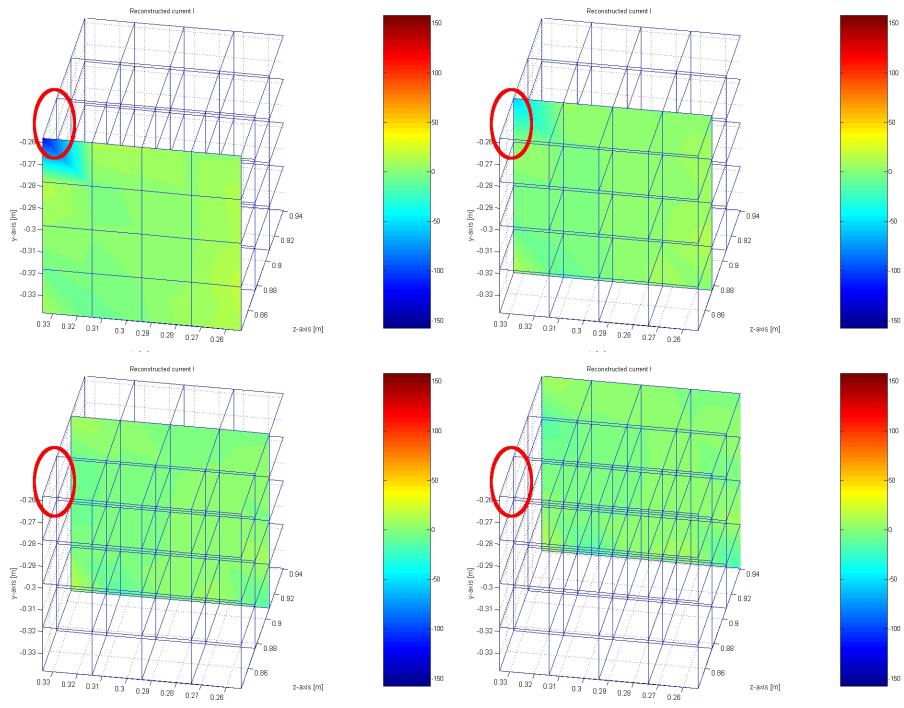


Abbildung 7.4: Stromrekonstruktionen in einem Widerstandsnetzwerk mit einer Fehlstelle (rot markiert), Schnittbilder der einzelnen Ebenen des Widerstandsnetzwerks aus Abbildung 3.2

8

Zusammenfassung und Ausblick

In diesem letzten Kapitel fassen wir kurz die Ergebnisse der Arbeit zusammen und stellen dabei die wesentlichen Ideen heraus. Zusätzlich geben wir einen Ausblick auf mögliche Forschungsfelder im Kontext dieser Arbeit.

In Kapitel 3 haben wir drei auf der Tikhonov-Regularisierung basierende Algorithmen zur Stromrekonstruktion aus den Magnetfelddaten vorgestellt. Wir haben dabei unterschiedliches Vorwissen in die Entwicklung der Methoden einfließen lassen, um den Lösungsraum zu verkleinern. Ausgehend von der Tikhonov-Regularisierung mit finiter Integration haben wir zwei neue Algorithmen entwickelt. Die divergenzfreie Tikhonov-Regularisierung verwendet dabei die aus den Maxwell-Gleichungen resultierende Divergenzfreiheit der Ströme, während die Projektionsmethode eine Basis aus Lösungen des vollen Randwertproblems mit unterschiedlichen Leitfähigkeitsverteilungen nutzt.

Darauf aufbauend haben wir in Kapitel 4 die Stabilität dieser drei Methoden verglichen. Dazu haben wir zuerst aus dem Courant'schen Minimum-Maximum-Prinzip eine allgemeine Abschätzung für die Singulärwerte von Operatoren bezüglich der Unterräume bewiesen. Der Zusammenhang zwischen den Singulärwerten des Operators und der Schlechtgestellttheit der zugehörigen Gleichung wird dabei durch den Satz von Picard hergestellt. Die Anwendung auf die drei Methoden aus Kapitel 3 zeigte, dass die Verwendung von Vorwissen und die damit verbundene Einschränkung des Lösungsraums nicht nur zu größeren Singulärwerten, sondern auch zu besseren und stabileren Rekonstruktionsergebnissen führte.

Ähnlich wie die beiden vorigen Kapitel sind auch Kapitel 5 und Kapitel 6 als aufeinander aufbauend zu betrachten, denn in Kapitel 5 wurde das theoretische Fundament für den in Kapitel 6 vorgestellten Peeling-Algorithmus geschaffen. Ziel war es, den Rechenaufwand dadurch zu reduzieren, dass

nicht das volle, sondern ein reduziertes Tomographieproblem gelöst wird. Dahinter steht die Idee, das Gesamtmagnetfeld in Teilfelder aufzuspalten, die von Strömen in räumlich getrennten Gebieten erzeugt werden. Es wurde gezeigt, dass durch geometrische und physikalische Randbedingungen im hier verwendeten neuen Modell die dritte Komponente des Magnetfelds nur von Strömen in den Endplatten erzeugt wird. In Kapitel 5 haben wir gezeigt, dass die dritte Komponente eindeutig in Teilfelder aufgeteilt werden kann, die von Strömen in der jeweiligen Endplatte erzeugt werden. Des Weiteren haben wir den Nullraum dieses auf die Endplatten reduzierten Operators untersucht und Äquivalenz zum Nullraum des vollen Biot-Savart-Operators gezeigt. Im Einzelnen bedeutet das, dass jeder Stromverteilung in einer Endplatte, deren Magnetfeld keine H_3 -Komponente aufweist, eindeutig eine Stromverteilung im ganzen System zugeordnet werden kann, deren Magnetfeld komplett verschwindet und umgekehrt.

Kapitel 6 beschäftigt sich mit der erstmaligen numerischen Umsetzung des Peeling-Algorithmus. Dabei wurde zuerst mit einer modifizierten Kirsch-Kress-Methode die dritte Komponente des Magnetfelds aufgespalten. Da jede Komponente des Magnetfelds die Laplace-Gleichung löst, wurde ein Potentialansatz über geeignete Hilfsflächen gemacht und die resultierende schlecht gestellte Integralgleichung mit Tikhonov-Regularisierung gelöst. Um aus den Teilfeldern nun die Stromverteilung in den Platten zu erlangen, wurde die in Kapitel 3 eingeführte Tikhonov-Regularisierung mit finiter Integration verwendet. Um die gewünschte Stromverteilung orthogonal zu den Platten zu berechnen, konnte nun die Divergenzfreiheit der Gesamtstromverteilung verwendet werden. Den Abschluss bildeten hier numerische Beispiele und ein Vergleich dieser Methode mit den klassischen Algorithmen.

Das abschließende Kapitel 7 zeigt Rekonstruktionen mit einem neu konzipierten und aufgebauten Widerstandsnetzwerk, in dem durch eine Schiebевorrichtung einzelne Widerstände gezielt stromlos geschaltet werden können.

Diese Arbeit bietet diverse Ansätze zur weiteren Bearbeitung der Magnetotomographie an Brennstoffzellen, gerade im Hinblick auf die enge Verzahnung von Mathematik und Ingenieurwissenschaften.

Das bisher verwendete Gitter zur Berechnung der Ströme ist aus einfachen Quadern zusammengesetzt. An dieser Stelle erscheint es nur logisch, komplexere Gitter zu verwenden. In diesem Zusammenhang erscheint auch die Implementierung einer Finite-Elemente- oder Finite-Volumen-Methode sinnvoll. Ein weiterer Ansatzpunkt im Bereich der Simulation ist es, schnelle Methoden

zur Simulation von Strömen und Magnetfeldern zu implementieren. Eine Möglichkeit wäre die Anwendung der schnellen Fourier-Transformation (FFT) wie in [Hei08] zur Beschleunigung der Matrix-Vektor-Multiplikation.

In [HKP05] wurde die Eindeutigkeit für ein diskretes Widerstandsnetzwerk gezeigt. In Kapitel 5 haben wir die Äquivalenz des vollen und des reduzierten Problems bewiesen. Daraus ergeben sich folgende Fragestellungen: Gibt es andere praktisch relevante Situationen, in denen die Eindeutigkeit der Stromrekonstruktion aus den Magnetfelddaten bewiesen werden kann? Welche anderen Unterräume zur Rekonstruktion erscheinen aufbauend auf Kapitel 3 sinnvoll? Diese Räume müssen auf der einen Seite groß genug sein, um alle physikalisch möglichen Stromverteilungen zu beinhalten, auf der anderen Seite aber so klein wie möglich, um die Schlechtgestellttheit des Problems zu reduzieren. Eine weitere Forderung ist die Robustheit gegenüber Messfehlern, kleine Abweichungen dürfen nicht die Rekonstruktion unbrauchbar machen.

Messwerte sind immer mit einem Messfehler behaftet. Man kann also das gemessene Magnetfeld $H_{\text{mess}} = H_{\text{wahr}} + H_{\text{err}}$ als Summe aus wahren Magnetfeld und einem Fehlerfeld auffassen. Dieses Fehlerfeld beinhaltet systematische und stochastische Fehlerquellen. Für die in Abschnitt 2.8 skizzierten und weitere mögliche Fehler kann eine Sensitivitäts- und Potentialabschätzung durchgeführt werden, um genaue Spezifikationen an Sensoren und Verfahrtsch einer nächsten Gerätegeneration zu stellen.

Das hier verwendete Modell basiert auf den statischen Maxwell-Gleichungen, das heißt, wir setzen eine zumindest während eines Messzyklus zeitlich konstante Stromverteilung voraus. Genaue Kenntnis dynamischer Zustände wie zum Beispiel Anfahr- und Lastwechselzyklen sind in der Brennstoffzellenentwicklung von großem Interesse. Daher kann das Modell zu einem dynamischen Modell erweitert werden. Hierfür ist die Entwicklung eines neuen Prototypen der Messapparatur notwendig, die es erlaubt, mit mehreren Sensoren das Magnetfeld an vielen Punkten gleichzeitig oder in kurzen Zeitabständen messen zu können, um überhaupt dynamische Zustände abbilden zu können.

Die Messpunktoptimierung ist aus mehreren Gründen ein wichtiger Bereich mit Entwicklungspotential. Zur Entwicklung eines dynamischen Modells und der damit verbundenen Weiterentwicklung der Messapparatur ist es im Hinblick auf die Steuerungselektronik und auch auf die Kosten notwendig,

möglichst wenig Sensoren zu verbauen, ohne signifikante Einbußen in Auflösung und Genauigkeit hinnehmen zu müssen. Doch auch im statischen Modell sind mit optimierten Messpunkten schnellere Messzyklen möglich, außerdem wird das Problem besser gestellt. Auf diesem Gebiet kann aufbauend auf den Arbeiten [Mar07] und [LRSS09] geforscht werden.

Wie in Abschnitt 2.8 beschrieben, wurden in der Brennstoffzelle bisher nur Materialien mit einer magnetischen Permeabilität $\mu \approx 1$ verwendet. Ein Entwicklungszweig sind metallische Bipolarplatten, die eine höhere Leitfähigkeit und damit einen geringeren Leistungsverlust als ihre graphitischen Pendanten aufweisen. Darüber hinaus ergibt sich bei der Verwendung von metallischen Bipolarplatten ein geringerer Platzbedarf. Um die Magnetotomographie auch auf diese Zellen anwenden zu können, ist eine Anpassung des Modells notwendig, da der hier angenommene lineare Zusammenhang $B = \mu_0 H$ zwischen magnetischer Flussdichte und Feldstärke nicht mehr gegeben ist. Ansätze zur Berechnung der Felder in diesem Fall finden sich unter anderem in [Leh90] (Abschnitt 5.5) und besonders in [Fro94] (Abschnitt 5.4).

Literaturverzeichnis

- [AF03] ADAMS, Robert ; FOURNIER, John J. F.: *Sobolev Spaces*. 2nd. Amsterdam : Elsevier, 2003
- [BHLP07] BEN HASSEN, Fami ; LIU, Jijun ; POTTHAST, Roland: On Source Analysis by Wave Splitting with Applications in Inverse Scattering of Multiple Obstacles. In: *Journal of Computational Mathematics* 25 (2007), S. 266–281
- [CDWG98] CLEGHORN, S. J. C. ; DEROUIN, C. R. ; WILSON, M. S. ; GOTTESFELD, S.: A printed circuit board approach to measuring current distribution in a fuel cell. In: *Journal of Applied Electrochemistry* 28 (1998), S. 663–672
- [CFS00] CARRETTE, Linda ; FRIEDRICH, K. A. ; STIMMING, Ulrich: Fuel Cells: Principles, Types, Fuels, and Applications. In: *ChemPhysChem* 1 (2000), Nr. 4, S. 162–193. – DOI 10.1002/1439-7641(20001215)1:4<162::AID-CPHC162>3.0.CO;2-Z
- [CG03] CHARITAT, T ; GRANER, F: About the magnetic field of a finite wire. In: *European Journal of Physics* 24 (2003), Nr. 3, S. 267–270. – DOI 10.1088/0143-0807/24/3/306
- [CH08] CZICHOS, Horst (Hrsg.) ; HENNECKE, Manfred (Hrsg.): *HÜTTE – Das Ingenieurwissen*. 33. Berlin, Heidelberg : Springer, 2008
- [CK98] COLTON, David ; KRESS, Rainer: *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. 2. New York : Springer, 1998

- [DGPTR01] DEL GRATTA, Cosimo ; PIZZELLA, Vittorio ; TECCHIO, Franca ; ROMANI, Gian L.: Magnetoencephalography - a noninvasive brain imaging method with 1 ms time resolution. In: *Reports on Progress in Physics* 64 (2001), S. 1759–1814. – DOI 10.1088/0034-4885/64/12/204
- [EHN96] ENGL, Heinz W. ; HANKE, Martin ; NEUBAUER, Andreas: *Regularization of Inverse Problems*. Dordrecht : Kluwer Academic Publ., 1996
- [Fro94] FROHNE, Heinrich: *Elektrische und magnetische Felder*. Stuttgart : B. G. Teubner, 1994
- [GR79] GIRAULT, Vivette ; RAVIART, Pierre-Arnaud: *Lecture Notes in Mathematics*. Bd. 749: *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations*. New York : Springer, 1979
- [GR86] GIRAULT, Vivette ; RAVIART, Pierre-Arnaud: *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*. Berlin : Springer, 1986
- [Had52] HADAMARD, Jacques S.: *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*. New Haven : Dover Publications, 1952
- [Hei08] HEINEMEYER, Eric: *Integral Equation Methods for Rough Surface Scattering Problems in three Dimensions*, Georg-August-Universität Göttingen, Diss., 2008
- [Heu04] HEUSER, Harro: *Lehrbuch der Analysis – Teil 2*. 13. Wiesbaden : B. G. Teubner, 2004
- [HHI⁺93] HÄMÄLÄINEN, Matti ; HARI, Riitta ; ILMONIEMI, Risto J. ; KNUUTILA, Jukka ; LOUNASMAA, Olli V.: Magnetoencephalography - theory, instrumentation, and applications to noninvasive studies of the working human brain. In: *Reviews of Modern Physics* 65 (1993), S. 413–497. – DOI 10.1103/RevModPhys.65.413
- [HKP05] HAUER, Karl-Heinz ; KÜHN, Lars ; POTTHAST, Roland: On uniqueness and non-uniqueness for current reconstruction from magnetic fields. In: *Inverse Problems* 21 (2005), Nr. 3, S. 955–967. – DOI 10.1088/0266-5611/21/3/010

- [HMK⁺08] HARTNIG, Ch. ; MANKE, I. ; KARDJILOV, N. ; HILGER, A. ; GRÜNERBEL, M. ; KACZEROWSKI, J. ; BANHART, J. ; LEHNERT, W.: Combined neutron radiography and locally resolved current density measurements of operating PEM fuel cells. In: *Journal of Power Sources* 176 (2008), Februar, Nr. 2, S. 452–459. – DOI 10.1016/j.jpowsour.2007.08.058
- [HPW08] HAUER, Karl-Heinz ; POTTHAST, Roland ; WANNERT, Martin: Algorithms for magnetic tomography – on the role of a priori knowledge and constraints. In: *Inverse Problems* 24 (2008). – DOI 10.1088/0266-5611/24/4/045008
- [HPWS05] HAUER, Karl-Heinz ; POTTHAST, Roland ; WÜSTER, Thorsten ; STOLTEN, Detlef: Magnetotomography – a new method for analysing fuel cell performance and quality. In: *Journal of Power Sources* 143 (2005), April, Nr. 1-2, S. 67–74. – DOI 10.1016/j.jpowsour.2004.11.054
- [Ker80] KERSTEN, Heinrich: Grenz- und Sprungbeziehungen für Potentiale mit quadratsummierbarer Flächenbelegung. In: *Resultate der Mathematik* 3 (1980), S. 17–24
- [KK86] KIRSCH, Andreas ; KRESS, Rainer: On an integral equation of the first kind in inverse acoustic scattering. In: *Inverse problems (Oberwolfach, 1986)* Bd. 77. Basel : Birkhäuser, 1986, S. 93–102
- [KK87a] KIRSCH, Andreas ; KRESS, Rainer: A numerical method for an inverse scattering problem. In: *Inverse and Ill-Posed Problems* 4 (1987), S. 279–289
- [KK87b] KIRSCH, Andreas ; KRESS, Rainer: An optimization method in inverse acoustic scattering (invited contribution). In: *Boundary elements IX, Vol. 3 (Stuttgart, 1987)*. Southampton : Computational Mechanics, 1987, S. 3–18
- [KK93] KÜPFMÜLLER, Karl ; KOHN, Gerhard: *Theoretische Elektrotechnik und Elektronik – Eine Einführung*. 14. Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 1993
- [KKP02] KRESS, Rainer ; KÜHN, Lars ; POTTHAST, Roland: Reconstruction of a current distribution from its magnetic field. In: *Inverse Problems* 18 (2002), Nr. 4, S. 1127–1146. – DOI 10.1088/0266-5611/18/4/312

- [Kos94] KOST, Arnulf: *Numerische Methoden in der Berechnung elektromagnetischer Felder*. Berlin : Springer, 1994
- [Kre99] KRESS, Rainer: *Linear Integral Equations*. 2nd. New York : Springer, 1999
- [Kre03] KRESS, Rainer: *Numerik 2*. Vorlesungsskript, 2003
- [Küh05] KÜHN, Lars: *Magnetic Tomography – On the Nullspace of the Biot-Savart Operator and Point Sources for Field and Domain Reconstruction*, Georg-August-Universität Göttingen, Diss., 2005
- [KVR06] KUBIK, Jan ; VCELAK, Jan ; RIPKA, Pavel: On cross-axis effect of the anisotropic magnetoresistive sensors. In: *Sensors and Actuators A: Physical* 129 (2006), Nr. 1-2, S. 15 – 19. – DOI 10.1016/j.sna.2005.09.053
- [Leh90] LEHNER, Günther: *Elektromagnetische Feldtheorie für Ingenieure und Physiker*. 2. New York : Springer, 1990
- [LRSS09] LUSTFELD, Hans ; REISSEL, Martin ; SCHMIDT, Ulrich ; STEFFEN, Bernd: Reconstruction of electric currents in a fuel cell by magnetic field measurements. In: *ASME Journal of Fuel Cell Science and Technology* 6 (2009), Nr. 2. – DOI 10.1115/1.2972171
- [Mar68] MARTENSEN, Erich: *Potentialtheorie*. Stuttgart : B. G. Teubner, 1968
- [Mar07] MARX, Boris: *Messpunktoptimierung bei der Magnetischen Tomographie mit Hilfe eines evolutionären Algorithmus*, Georg-August-Universität Göttingen, Diplomarbeit, 2007
- [McL00] MCLEAN, William: *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*. Cambridge : Cambridge University Press, 2000
- [MS64] MEYERS, Norman G. ; SERRIN, James: $H=W$. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 51 (1964), Nr. 6, S. 1055–1056
- [Pie68] PIEPKE, H.: Beitrag zur Maschenanalyse elektrischer Netze. In: *Electrical Engineering (Archiv für Elektrotechnik)* 52 (1968), Nr. 1. – DOI 10.1007/BF01413802

- [PK03] POTTHAST, Roland ; KÜHN, Lars: On the convergence of the finite integration technique for the anisotropic boundary value problem of magnetic tomography. In: *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 26 (2003), Nr. 9, S. 739–757. – DOI 10.1002/mma.392
- [PW09] POTTHAST, Roland ; WANNERT, Martin: Uniqueness of Current Reconstructions for Magnetic Tomography in Multilayer Devices. In: *SIAM Journal on Applied Mathematics* 70 (2009), Nr. 2, S. 563–578. – DOI 10.1137/080719650
- [Sar87] SARVAS, Jukka: Basic mathematical and electromagnetic concepts of the biomagnetic inverse problem. In: *Physics in Medicine and Biology* 32 (1987), S. 11–22. – DOI 10.1088/0031-9155/32/1/004
- [SCW⁺98] STUMPER, Jürgen ; CAMPBELL, Stephen A. ; WILKINSON, David P. ; JOHNSON, Mark C. ; DAVIS, Mike: In-situ methods for the determination of current distributions in PEM fuel cells. In: *Electrochimica Acta* 43 (1998), August, Nr. 24, S. 3773–3783. – DOI 10.1016/S0013-4686(98)00137-6
- [Tho06] THOMAS, Daniel: *Rekonstruktion von zweidimensionalen Leiterstrukturen mit Hilfe der Magnetotomographie*, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität, Bonn, Diplomarbeit, 2006
- [Tik62] TIKHONOV, Andrei N.: On the solution of incorrectly formulated problems and the regularization method. In: *Soviet Math. Doklady* 4 (1962), S. 1035–1038
- [Wei86] WEILAND, Thomas: Die Diskretisierung der Maxwell-Gleichungen. In: *Physikalische Blätter* 42 (1986), Nr. 7, S. 191–201
- [WHG00] WIESER, Ch. ; HELMBOLD, A. ; GÜLZOW, E.: A new technique for two-dimensional current distribution measurements in electrochemical cells. In: *Journal of Applied Electrochemistry* 30 (2000), Juli, Nr. 7, S. 803–807. – DOI 10.1023/A:1004047412066

Danksagung

Ich danke meinem Doktorvater Prof. Dr. Roland Potthast für die interessante Themenstellung und die trotz der räumlichen Distanz hervorragende Betreuung und sehr angenehme, produktive Zusammenarbeit.

Mein Dank geht an Prof. Dr. Rainer Kreß für die Übernahme des Erstreferats und die sehr hilfreichen Anmerkungen während der Entstehung dieser Arbeit.

Diese Dissertation ist während meiner Zeit am Institut für Energietechnik: Brennstoffzellen (IEF-3) des Forschungszentrums Jülich entstanden, dem ich für die finanzielle Unterstützung und die hervorragenden Arbeitsbedingungen sehr dankbar bin. Ich danke dem Institutsleiter Herrn Prof. Dr.-Ing. Detlev Stolten, der es mir ermöglicht hat, diese Arbeit hier anzufertigen.

Jürgen Mergel und der gesamten Abteilung EWN danke ich für die immer herzliche und respektvolle Arbeitsatmosphäre. Mein besonderer Dank geht dabei an Christian Trappmann für viele Diskussionen und pragmatische Lösungsansätze zu ingenieurwissenschaftlichen Fragestellungen. Weiterhin danke ich allen Doktoranden des IEF-3 für die sehr gute Zusammenarbeit.

Herrn Dr.-Ing. Karl-Heinz Hauer von der Firma TomoScience und Herrn Dr. Helmut Soltner und Herrn Klaus-Peter Hollfeld von der Zentralabteilung Technologie des Forschungszentrums Jülich gilt Dank für die technische Unterstützung.

Großer Dank geht an Felix Schenk und Christian Schuft für fruchtbare Diskussionen und Korrekturvorschläge und an Kerstin Engel für die kritische Durchsicht, die dieser Arbeit den letzten Schliff gegeben hat.

Der tiefste Dank geht an meine Eltern. Für alles!

1. **Einsatz von multispektralen Satellitenbilddaten in der Wasserhaushalts- und Stoffstrommodellierung – dargestellt am Beispiel des Rureinzugsgebietes**
von C. Montzka (2008), XX, 238 Seiten
ISBN: 978-3-89336-508-1
2. **Ozone Production in the Atmosphere Simulation Chamber SAPHIR**
by C. A. Richter (2008), XIV, 147 pages
ISBN: 978-3-89336-513-5
3. **Entwicklung neuer Schutz- und Kontaktierungsschichten für Hochtemperatur-Brennstoffzellen**
von T. Kiefer (2008), 138 Seiten
ISBN: 978-3-89336-514-2
4. **Optimierung der Reflektivität keramischer Wärmedämmschichten aus Yttrium-teilstabilisiertem Zirkoniumdioxid für den Einsatz auf metallischen Komponenten in Gasturbinen**
von A. Stuke (2008), X, 201 Seiten
ISBN: 978-3-89336-515-9
5. **Lichtstreuende Oberflächen, Schichten und Schichtsysteme zur Verbesserung der Lichteinkopplung in Silizium-Dünnschichtsolarzellen**
von M. Berginski (2008), XV, 171 Seiten
ISBN: 978-3-89336-516-6
6. **Politiksznarien für den Klimaschutz IV – Szenarien bis 2030**
hrsg.von P. Markewitz, F. Chr. Matthes (2008), 376 Seiten
ISBN 978-3-89336-518-0
7. **Untersuchungen zum Verschmutzungsverhalten rheinischer Braunkohlen in Kohledampferzeugern**
von A. Schlüter (2008), 164 Seiten
ISBN 978-3-89336-524-1
8. **Inorganic Microporous Membranes for Gas Separation in Fossil Fuel Power Plants**
by G. van der Donk (2008), VI, 120 pages
ISBN: 978-3-89336-525-8
9. **Sinterung von Zirkoniumdioxid-Elektrolyten im Mehrlagenverbund der oxidkeramischen Brennstoffzelle (SOFC)**
von R. Mücke (2008), VI, 165 Seiten
ISBN: 978-3-89336-529-6
10. **Safety Considerations on Liquid Hydrogen**
by K. Verfondern (2008), VIII, 167 pages
ISBN: 978-3-89336-530-2

11. **Kerosinreformierung für Luftfahrtanwendungen**
von R. C. Samsun (2008), VII, 218 Seiten
ISBN: 978-3-89336-531-9
12. **Der 4. Deutsche Wasserstoff Congress 2008 – Tagungsband**
hrsg. von D. Stolten, B. Emonts, Th. Grube (2008), 269 Seiten
ISBN: 978-3-89336-533-3
13. **Organic matter in Late Devonian sediments as an indicator for environmental changes**
by M. Kloppisch (2008), XII, 188 pages
ISBN: 978-3-89336-534-0
14. **Entschwefelung von Mitteldestillaten für die Anwendung in mobilen Brennstoffzellen-Systemen**
von J. Latz (2008), XII, 215 Seiten
ISBN: 978-3-89336-535-7
15. **RED-IMPACT**
Impact of Partitioning, Transmutation and Waste Reduction Technologies on the Final Nuclear Waste Disposal
SYNTHESIS REPORT
ed. by W. von Lensa, R. Nabbi, M. Rossbach (2008), 178 pages
ISBN 978-3-89336-538-8
16. **Ferritic Steel Interconnectors and their Interactions with Ni Base Anodes in Solid Oxide Fuel Cells (SOFC)**
by J. H. Froitzheim (2008), 169 pages
ISBN: 978-3-89336-540-1
17. **Integrated Modelling of Nutrients in Selected River Basins of Turkey**
Results of a bilateral German-Turkish Research Project
project coord. M. Karpuzcu, F. Wendland (2008), XVI, 183 pages
ISBN: 978-3-89336-541-8
18. **Isotopengeochemische Studien zur klimatischen Ausprägung der Jüngerer Dryas in terrestrischen Archiven Eurasiens**
von J. Parplies (2008), XI, 155 Seiten, Anh.
ISBN: 978-3-89336-542-5
19. **Untersuchungen zur Klimavariabilität auf dem Tibetischen Plateau - Ein Beitrag auf der Basis stabiler Kohlenstoff- und Sauerstoffisotope in Jahrringen von Bäumen waldgrenznaher Standorte**
von J. Griessinger (2008), XIII, 172 Seiten
ISBN: 978-3-89336-544-9

20. **Neutron-Irradiation + Helium Hardening & Embrittlement Modeling of 9%Cr-Steels in an Engineering Perspective (HELENA)**
by R. Chaouadi (2008), VIII, 139 pages
ISBN: 978-3-89336-545-6
21. **in Bearbeitung**
22. **Verbundvorhaben APAWAGS (AOEV und Wassergenerierung) – Teilprojekt: Brennstoffreformierung – Schlussbericht**
von R. Peters, R. C. Samsun, J. Pasel, Z. Porš, D. Stolten (2008), VI, 106 Seiten
ISBN: 978-3-89336-547-0
23. **FREEVAL**
Evaluation of a Fire Radiative Power Product derived from Meteosat 8/9 and Identification of Operational User Needs
Final Report
project coord. M. Schultz, M. Wooster (2008), 139 pages
ISBN: 978-3-89336-549-4
24. **Untersuchungen zum Alkaliverhalten unter Oxycoal-Bedingungen**
von C. Weber (2008), VII, 143, XII Seiten
ISBN: 978-3-89336-551-7
25. **Grundlegende Untersuchungen zur Freisetzung von Spurstoffen, Heißgaschemie, Korrosionsbeständigkeit keramischer Werkstoffe und Alkalirückhaltung in der Druckkohlenstaubfeuerung**
von M. Müller (2008), 207 Seiten
ISBN: 978-3-89336-552-4
26. **Analytik von ozoninduzierten phenolischen Sekundärmetaboliten in *Nicotiana tabacum* L. cv Bel W3 mittels LC-MS**
von I. Koch (2008), III, V, 153 Seiten
ISBN 978-3-89336-553-1
27. **IEF-3 Report 2009. Grundlagenforschung für die Anwendung**
(2009), ca. 230 Seiten
ISBN: 978-3-89336-554-8
28. **Influence of Composition and Processing in the Oxidation Behavior of MCrAlY-Coatings for TBC Applications**
by J. Toscano (2009), 168 pages
ISBN: 978-3-89336-556-2
29. **Modellgestützte Analyse signifikanter Phosphorbelastungen in hessischen Oberflächengewässern aus diffusen und punktuellen Quellen**
von B. Tetzlaff (2009), 149 Seiten
ISBN: 978-3-89336-557-9

30. **Nickelreaktivlot / Oxidkeramik – Fügungen als elektrisch isolierende Dichtungskonzepte für Hochtemperatur-Brennstoffzellen-Stacks**
von S. Zügner (2009), 136 Seiten
ISBN: 978-3-89336-558-6
31. **Langzeitbeobachtung der Dosisbelastung der Bevölkerung in radioaktiv kontaminierten Gebieten Weißrusslands – Korma-Studie**
von H. Dederichs, J. Pillath, B. Heuel-Fabianek, P. Hill, R. Lennartz (2009),
Getr. Pag.
ISBN: 978-3-89336-532-3
32. **Herstellung von Hochtemperatur-Brennstoffzellen über physikalische Gasphasenabscheidung**
von N. Jordán Escalona (2009), 148 Seiten
ISBN: 978-3-89336-532-3
33. **Real-time Digital Control of Plasma Position and Shape on the TEXTOR Tokamak**
by M. Mitri (2009), IV, 128 pages
ISBN: 978-3-89336-567-8
34. **Freisetzung und Einbindung von Alkalimetallverbindungen in kohle-befeuerten Kombikraftwerken**
von M. Müller (2009), 155 Seiten
ISBN: 978-3-89336-568-5
35. **Kosten von Brennstoffzellensystemen auf Massenbasis in Abhängigkeit von der Absatzmenge**
von J. Werhahn (2009), 242 Seiten
ISBN: 978-3-89336-569-2
36. **Einfluss von Reoxidationszyklen auf die Betriebsfestigkeit von anodengestützten Festoxid-Brennstoffzellen**
von M. Ettler (2009), 138 Seiten
ISBN: 978-3-89336-570-8
37. **Großflächige Plasmaabscheidung von mikrokristallinem Silizium für mikromorphe Dünnschichtsolarmodule**
von T. Kilper (2009), XVII, 154 Seiten
ISBN: 978-3-89336-572-2
38. **Generalized detailed balance theory of solar cells**
by T. Kirchartz (2009), IV, 198 pages
ISBN: 978-3-89336-573-9
39. **The Influence of the Dynamic Ergodic Divertor on the Radial Electric Field at the Tokamak TEXTOR**
von J. W. Coenen (2009), xii, 122, XXVI pages
ISBN: 978-3-89336-574-6

40. **Sicherheitstechnik im Wandel Nuklearer Systeme**
von K. Nünighoff (2009), viii, 215 Seiten
ISBN: 978-3-89336-578-4
41. **Pulvermetallurgie hochporöser NiTi-Legierungen für Implantat- und Dämpfungsanwendungen**
von M. Köhl (2009), XVII, 199 Seiten
ISBN: 978-3-89336-580-7
42. **Einfluss der Bondcoatzusammensetzung und Herstellungsparameter auf die Lebensdauer von Wärmedämmschichten bei zyklischer Temperaturbelastung**
von M. Subanovic (2009), 188, VI Seiten
ISBN: 978-3-89336-582-1
43. **Oxygen Permeation and Thermo-Chemical Stability of Oxygen Permeation Membrane Materials for the Oxyfuel Process**
by A. J. Ellett (2009), 176 pages
ISBN: 978-3-89336-581-4
44. **Korrosion von polykristallinem Aluminiumoxid (PCA) durch Metalljodidschmelzen sowie deren Benetzungseigenschaften**
von S. C. Fischer (2009), 148 Seiten
ISBN: 978-3-89336-584-5
45. **IEF-3 Report 2009. Basic Research for Applications**
(2009), 217 Seiten
ISBN: 978-3-89336-585-2
46. **Verbundvorhaben ELBASYS (Elektrische Basissysteme in einem CFK-Rumpf) - Teilprojekt: Brennstoffzellenabgase zur Tankinertisierung - Schlussbericht**
von R. Peters, J. Latz, J. Pasel, R. C. Samsun, D. Stolten
(2009), xi, 202 Seiten
ISBN: 978-3-89336-587-6
47. **Aging of ¹⁴C-labeled Atrazine Residues in Soil: Location, Characterization and Biological Accessibility**
by N. D. Jablonowski (2009), IX, 104 pages
ISBN: 978-3-89336-588-3
48. **Entwicklung eines energetischen Sanierungsmodells für den europäischen Wohngebäudesektor unter dem Aspekt der Erstellung von Szenarien für Energie- und CO₂ - Einsparpotenziale bis 2030**
von P. Hansen (2009), XXII, 281 Seiten
ISBN: 978-3-89336-590-6

49. **Reduktion der Chromfreisetzung aus metallischen Interkonnektoren für Hochtemperaturbrennstoffzellen durch Schutzschichtsysteme**
von R. Trebbels (2009), iii, 135 Seiten
ISBN: 978-3-89336-591-3
50. **Bruchmechanische Untersuchung von Metall / Keramik-Verbundsystemen für die Anwendung in der Hochtemperaturbrennstoffzelle**
von B. Kuhn (2009), 118 Seiten
ISBN: 978-3-89336-592-0
51. **Wasserstoff-Emissionen und ihre Auswirkungen auf den arktischen Ozonverlust**
Risikoanalyse einer globalen Wasserstoffwirtschaft
von T. Feck (2009), 180 Seiten
ISBN: 978-3-89336-593-7
52. **Development of a new Online Method for Compound Specific Measurements of Organic Aerosols**
by T. Hohaus (2009), 156 pages
ISBN: 978-3-89336-596-8
53. **Entwicklung einer FPGA basierten Ansteuerungselektronik für Justageeinheiten im Michelson Interferometer**
von H. Nöldgen (2009), 121 Seiten
ISBN: 978-3-89336-599-9
54. **Observation – and model – based study of the extratropical UT/LS**
by A. Kunz (2010), xii, 120, xii pages
ISBN: 978-3-89336-603-3
55. **Herstellung polykristalliner Szintillatoren für die Positronen-Emissions-Tomographie (PET)**
von S. K. Karim (2010), VIII, 154 Seiten
ISBN: 978-3-89336-610-1
56. **Kombination eines Gebäudekondensators mit H₂-Rekombinatorelementen in Leichwasserreaktoren**
von S. Kelm (2010), vii, 119 Seiten
ISBN: 978-3-89336-611-8
57. **Plant Leaf Motion Estimation Using A 5D Affine Optical Flow Model**
by T. Schuchert (2010), X, 143 pages
ISBN: 978-3-89336-613-2
58. **Tracer-tracer relations as a tool for research on polar ozone loss**
by R. Müller (2010), 116 pages
ISBN: 978-3-89336-614-9

59. **Sorption of polycyclic aromatic hydrocarbon (PAH) to Yangtze River sediments and their components**
by J. Zhang (2010), X, 109 pages
ISBN: 978-3-89336-616-3

60. **Weltweite Innovationen bei der Entwicklung von CCS-Technologien und Möglichkeiten der Nutzung und des Recyclings von CO₂**
Studie im Auftrag des BMWi
von W. Kuckshinrichs et al. (2010), X, 139 Seiten
ISBN: 978-3-89336-617-0

61. **Herstellung und Charakterisierung von sauerstoffionenleitenden Dünnschichtmembranstrukturen**
von M. Betz (2010), XII, 112 Seiten
ISBN: 978-3-89336-618-7

62. **Politiksznarien für den Klimaschutz V – auf dem Weg zum Strukturwandel, Treibhausgas-Emissionsszenarien bis zum Jahr 2030**
hrsg. von P. Hansen, F. Chr. Matthes (2010), 276 Seiten
ISBN: 978-3-89336-619-4

63. **Charakterisierung Biogener Sekundärer Organischer Aerosole mit Statistischen Methoden**
von C. Spindler (2010), iv, 163 Seiten
ISBN: 978-3-89336-622-4

64. **Stabile Algorithmen für die Magnetotomographie an Brennstoffzellen**
von M. Wannert (2010), ix, 119 Seiten
ISBN: 978-3-89336-623-1

Kurzzusammenfassung:

Brennstoffzellen sind Energiewandler, die chemische Energie direkt effizient in elektrische und thermische Energie umwandeln. Um einen optimalen Zellbetrieb zu gewährleisten, ist es notwendig, eine möglichst homogene Stromverteilung sicher zu stellen. Daher ist es aus Forschungs-, Diagnose- und Wartungszwecken von Interesse, die Stromverteilung in einer Zelle messen zu können.

In diesem Buch wird ein nicht-invasives Messverfahren vorgestellt, das aus dem Magnetfeld außerhalb der Brennstoffzelle die innere Stromverteilung rekonstruiert. Dabei werden Rekonstruktionsalgorithmen entwickelt und auf ihre Stabilität hin analysiert. Die Algorithmen beinhalten zum einen ein gewisses Vorwissen über die wahre Stromverteilung, zum anderen wird zuerst das Magnetfeld numerisch in unterschiedliche Teilfelder aufgespaltet, um so die Komplexität des Problems zu reduzieren.

Autor:

Martin Wannert studierte an der Ruhr-Universität Bochum und der Georg-August-Universität Göttingen Mathematik mit Nebenfach Informatik. In seiner Diplomarbeit am Institut für Numerische und Angewandte Mathematik der Georg-August-Universität Göttingen untersuchte er ein inverses Problem zur Laplace-Gleichung. Im Jahr 2006 begann er am Institut für Energieforschung – Brennstoffzellen (IEF-3) des Forschungszentrums Jülich mit der Entwicklung und Untersuchung von Algorithmen für die Magnetotomographie an Brennstoffzellen. Der Inhalt dieses Buches wurde von der Georg-August-Universität Göttingen als Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Naturwissenschaften genehmigt.

Institut:

Die Forschungsaufgaben des Instituts für Energieforschung – Brennstoffzellen (IEF-3) sind auf die Realisierung von Hoch- und Niedertemperatur-Brennstoffzellen sowie von entsprechenden Stacks und Systemen für stationäre oder mobile Anwendungen ausgerichtet. Ferner umfassen die verfahrens- und systemtechnischen Entwicklungen die Bereitstellung von Apparaten zur Brenngaserzeugung. Diese Arbeiten werden von physikalisch-chemischen Grundlagenuntersuchungen sowie systematischen Studien der Energieverfahrenstechnik begleitet.